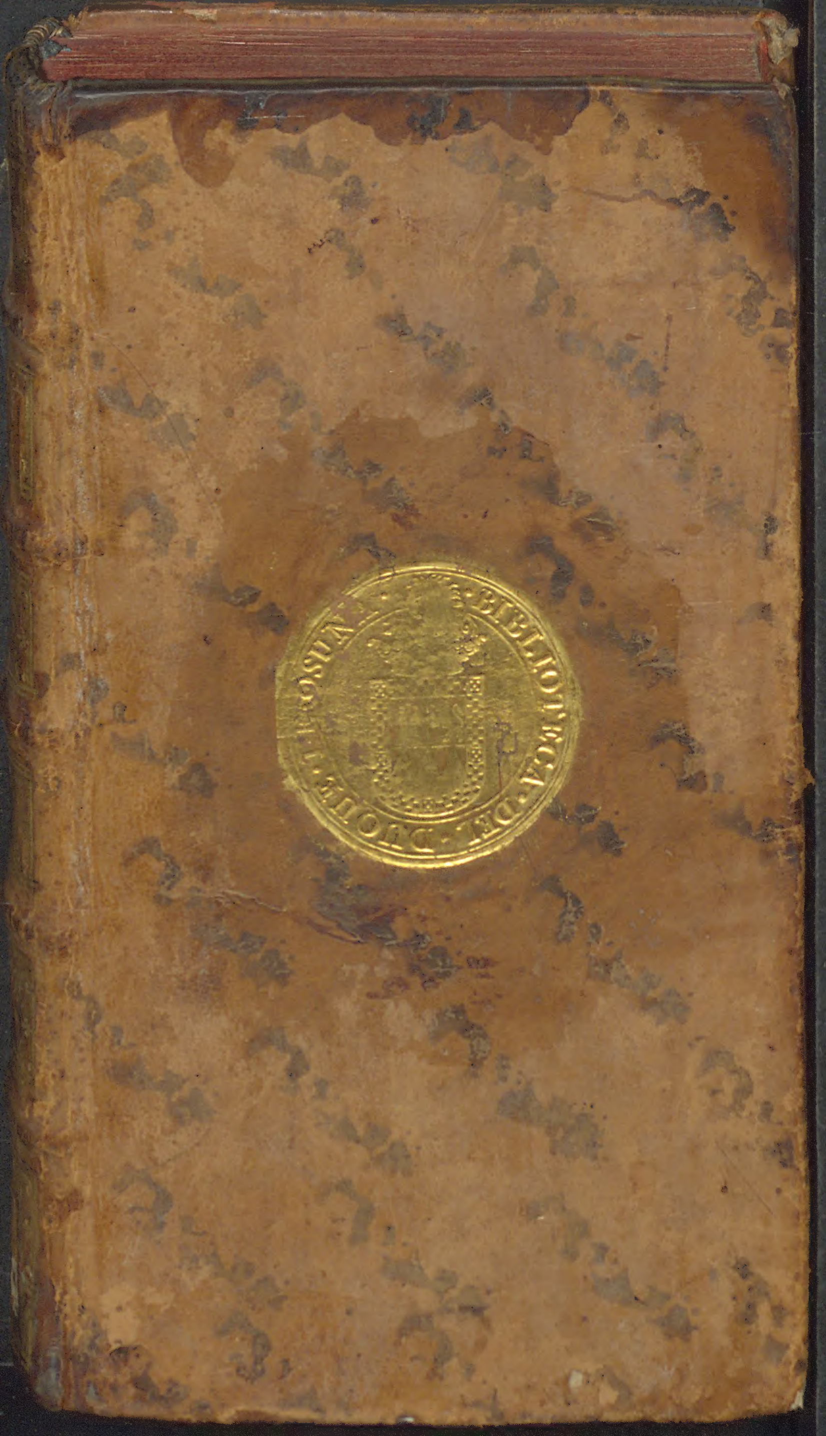
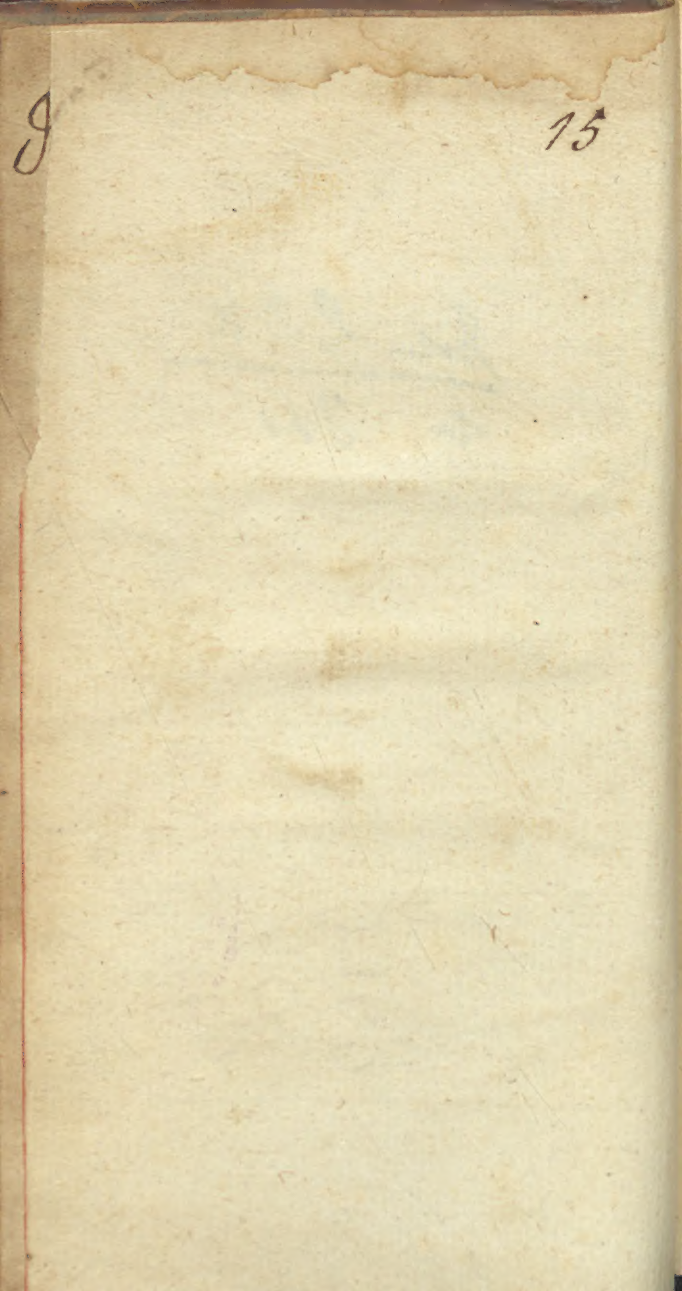

BIBLIOTECA · DEL · DUQUE
OSUNA






J
15

ABRÉGÉ
DE
L'ARITHMETIQUE
ET DE
LA GÉOMÉTRIE
DE L'OFFICIER;

CONTENANT

Les quatre premieres opérations de l'Arithmétique; & les Regles de Trois & de Compagnie; les principes de la Géométrie les plus utiles pour l'intelligence & la pratique des Fortifications, & pour lever des Cartes & des Plans; le toisé des Surfaces, & un abrégé de celui des Solides.

Par M. LE BLOND, *Maître de Mathématique de Monseigneur le* DUC DE BOURGOGNE.

SECONDE EDITION.



A PARIS,

Chez CH. ANT. JOMBERT, Imprimeur-Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, rue Dauphine, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. LVIII.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

AVERTISSEMENT.

QUELQUE besoin que les Militaires ayent de la Géométrie, tous les Livres qui traitent de cette Science ne sont pas également propres à les engager d'en faire l'objet de leur application. Les gros volumes ne conviennent guere à ceux qui n'ont pas contracté l'habitude d'étudier. Il leur faut des Traités qui joignent ensemble la clarté & la briéveté. On a tâché de réunir ces deux avantages dans *l'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier*, qu'on vient de donner au public : mais comme cet ouvrage est trop étendu pour ceux qui n'ont pas le loisir ou le dessein de faire une étude sérieuse & suivie de la Géométrie, on a composé cet abrégé de tout ce qui a paru le plus en

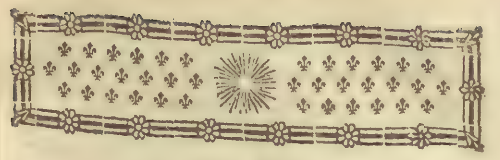
usage & le plus utile aux jeunes Officiers, pour les mettre en état d'étudier par regles & par principes les différentes parties de l'Art de la guerre.

On explique d'abord les quatre premieres opérations de l'Arithmétique ; ensuite les Regles de Trois & de Compagnie simples & composées. Une parfaite intelligence de ces Regles peut suffire dans les différens états de la vie. On est entré dans tout le détail nécessaire pour les faire concevoir nettement, & pour entrer dans les raisonnemens qui en donnent la démonstration.

Après l'Arithmétique suit la Géométrie. Elle contient les propositions les plus importantes pour lever les Plans & les Cartes, arpenter ou mesurer les surfaces, & tracer des polygones réguliers ou irréguliers, tant sur le papier, que sur le terrein. On y trouvera aussi

un précis du toisé des solides. Ceux qui auront bien compris tout ce que ce petit ouvrage renferme, pourront, s'il peut les exciter à acquérir une connoissance plus étendue de la Géométrie, étudier ensuite *l'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier*, dont il peut être regardé comme l'extrait, & passer après cela aux autres traités de Mathématique plus composés. L'habitude de démontrer, qu'ils auront acquise, leur rendra la lecture de ces Traités assez aisée : car lorsqu'on possede bien l'art que les Géometres employent dans leurs démonstrations, on est en état d'aller loin, même sans le secours d'un Maître, qui ne sert guere à ceux qui ont le goût & l'usage de l'application, que pour applanir les premieres difficultés, & montrer la route qu'on doit tenir pour faire du progrès dans la carriere géométrique.

Fin de la Table.



ABRÉGÉ D'ARITHMÉTIQUE ET DE GÉOMÉTRIE.

PREMIERE PARTIE

CONTENANT L'ARITHMÉTIQUE.

I.

Des principes de l'Arithmétique & de la Numération.

1. L'ARITHMÉTIQUE eſt la ſcience des nombres, ou l'art de compter & de calculer.

2. Le *nombre* eſt compoſé d'unités, & l'*unité* eſt une quantité déterminée, qui, étant ajoutée pluſieurs fois à elle-même, forme le nombre, qui n'eſt ainſi qu'un amas d'unités.



3. Les caractéres qu'on emploie dans l'Arithmétique ne consistent que dans les dix figures suivantes, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, qui se nomment *zero*, *un*, *deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*, *six*, *sept*, *huit* & *neuf*. Par l'arrangement qu'on leur donne, on exprime tous les nombres qu'on peut imaginer, de même qu'avec les vingt-quatre lettres de l'alphabet on écrit généralement tout ce que l'on veut.

4. Les caractéres de l'Arithmétique se nomment *chiffres*. Le premier, ou le zero, n'a jamais aucune valeur propre. Il sert seulement à faire valoir dix fois davantage les chiffres qui le précedent immédiatement à gauche.

5. Pour écrire un nombre quelconque avec les chiffres, on les pose en ligne droite les uns à côté des autres. Le premier à droite exprime les unités, le second, les dixaines de l'unité; le troisieme, les centaines de l'unité; le quatrieme, les mille; le cinquieme, les dixaines de mille; le sixieme, les centaines de mille; le septieme, les millions; le huitieme, les dixaines de millions; le neuvieme, les centaines de millions; le dixieme, les milliards; ensuite, les dixaines & les centaines de

milliards; puis, les unités, les dixaines & les centaines de billiards, puis de même des trilliards, &c.

6. Ainsi, suivant cet arrangement, dix unités du premier chiffre à droite, n'en valent qu'une dans celui qui le précede immédiatement à gauche; & dix unités de celui-ci n'en valent de même qu'une de celui qui le précede de la même maniere; & ainsi de suite de tous les autres chiffres qui s'éloignent du premier, en allant vers la gauche.

7. Pour écrire par le moyen des chiffres un nombre quelconque, comme *trois mille quatre cens quarante-deux*, on commencera par écrire le dernier chiffre à gauche, qui exprime le plus grand nombre, lequel, dans l'exemple proposé, est 3, qui doit être le quatrieme, en commençant à compter par le chiffre de la droite. On posera donc d'abord un 3, & on le fera précéder vers la droite du nombre qui exprime les centaines, qui est ici 4; celui-ci du nombre qui exprime les dixaines de l'unité, qui est de même 4; & enfin ce dernier nombre sera précédé vers la droite de celui qui exprime les unités, qui est 2, dans cet exemple. Ainsi on aura le nombre proposé *trois mille quatre cens quarante-*

deux; exprimé en chiffres par 3442.

8. On peut considérer chacun de ces chiffres comme formant une colonne particuliere, & alors le premier de la droite marquera celle des unités; le second, en allant de droite à gauche, celle des dixaines de l'unité, le troisieme, en allant de même vers la gauche, la colonne des centaines de l'unité; le quatrieme, celle des mille, & ainsi de suite, s'il y avoit plus de quatre chiffres.

9. Il suit de ce qu'on vient de dire, que pour énoncer la valeur d'une quantité quelconque écrite avec des chiffres, il faut exprimer la valeur de chaque chiffre, suivant la colonne dans laquelle il se trouve placé.

Pour connoître la valeur de cette colonne, on commencera à compter les colonnes par celle des unités. On dira à cette colonne, unités (ou, pour se servir de l'expression qu'on emploie ordinairement) *nombres*; à la seconde colonne, *dixaines*; à la troisieme, *centaines*; à la quatrieme, *mille*; à la cinquieme, *dixaines de mille*; à la sixieme, *centaines de mille*, &c. On s'arrêtera au dernier chiffre, dont on exprimera la valeur relativement à sa colonne, & successivement celle des autres chiffres,

en revenant à la colonne des unités.

Par exemple, si le nombre proposé est formé de trois chiffres, comme 549, le 5 étant à la troisieme colonne, qui est celle des centaines, vaut 500; le 4, qui est à celle des dixaines, vaut 40; & le 9, qui est à la colonne des unités, vaut simplement 9 unités. Ainsi on exprimera 549 par *cinq cens quarante-neuf.*

Si le nombre proposé est de quatre chiffres, comme 9704, on verra que le chiffre 9 étant à la colonne des milles, vaut neuf mille, & qu'ainsi il faudra énoncer 9704 par *neuf mille sept cens quatre.*

Remarque sur le Zero.

10. Le zero n'ayant aucune valeur propre, comme on l'a déja dit, il ne sert qu'à marquer les colonnes qui n'ont point de nombres; ou, ce qui est la même chose, à marquer la valeur des chiffres qui le précedent vers la gauche.

Car si l'on a un chiffre quelconque, comme 4, il ne vaut que quatre unités; mais en mettant un zero à sa droite, il se trouve alors à la colonne des dixaines, & il vaut 40; si on lui en ajoute

encore un à la droite du premier, il ſe trouvera à la colonne des centaines, & il vaudra 400.

11. D'où il ſuit qu'en plaçant un zero à la droite d'un nombre, on multiplie ce nombre par dix, & qu'on le multiplie par cent, ſi on lui en ajoute un ſecond; par mille, ſi on lui en ajoute trois, &c.

12. Lors donc qu'on énoncera un nombre dans lequel il y aura un ou pluſieurs zero, on n'exprimera point les colonnes occupées par ces zero; & de même, lorſqu'on aura un nombre à écrire, ou à marquer avec les chiffres, dans lequel toutes les colonnes intermédiaires n'auront point de valeur, on les remplira par des zero. Ainſi pour marquer *quatre mille ſoixante & dix*, on écrira 4070.

13. Pour énoncer un nombre qui contient plus de quatre ou cinq chiffres, on le partagera de trois en trois par des points ou des virgules, en commençant par le chiffre de la droite, c'eſt-à-dire, qu'on mettra le premier point entre les centaines & les mille, le ſecond, entre les centaines de mille & les millions; le troiſieme, entre les centaines de millions, & les milliards, & ainſi de ſuite.

Par exemple, pour le nombre 378, 914, 501 composé de neuf chiffres, on mettra un point ou une virgule entre le 5 & le 4, & un autre entre le 9 & le 8; ce qui donnera trois divisions. La premiere à droite se terminera par les centaines; la seconde par les centaines de mille, & la troisieme, par les centaines de millions; de sorte que la premiere tranche ou division de la gauche ne contient que des millions; la seconde, en allant de gauche à droite, des mille; & la troisieme de la gauche, ou la premiere de la droite, des unités; ce qui donne beaucoup de facilité pour exprimer tout d'un coup des nombres composés d'un grand nombre de chiffres; car il n'y a que la valeur des chiffres de chaque tranche à exprimer, c'est-à-dire, celle de 3 chiffres, en ajoutant au dernier le nom des unités que contient chaque tranche; ainsi le nombre proposé 378, 914, 501, contenant trois tranches, on exprimera d'abord la premiere à gauche, qui est celle des millions; ensuite, celle des mille; puis celle des unités; de sorte qu'il sera exprimé par 378 *millions*, 914 *mille*, 501 *unités*.

14. L'énoncé de l'expression des nombres se nomme *la numération*; & après

tout ce que l'on vient de dire ſur ce ſujet, il ſera aiſé d'énoncer la valeur de toutes ſortes de nombres marqués avec des chiffres, c'eſt-à-dire, de les *nombrer*, & de même de les écrire avec des chiffres; ce qui fait auſſi une partie de la numération. Mais ce qu'il eſt eſſentiel de remarquer & de bien concevoir, c'eſt que toutes les opérations de l'Arithmétique ſont fondées ſur cette ſuppoſition arbitraire, *que chaque unité d'une colonne en vaut dix dans celle qui la ſuit immédiatement à droite, & au contraire que dix unités d'une colonne n'en valent qu'une dans celle qui la précede immédiatement à gauche.*

Pour donner encore plus de facilité à énoncer ou nombrer un nombre exprimé par beaucoup de chiffres, on terminera cet article par la numération du nombre ſuivant,

7	7	4,	4	2	7,	3	2	8,	1	4	2,	7	5	9,	8	4	2,	5	6	0.
Centaines de quatrilliards.	Dixaines de quatrilliards.	Quatrilliards.	Centaines de trilliards.	Dixaines de trilliards,	Trilliards.	Centaines de billiards.	Dixaines de billiards.	Billiards,	Centaines de milliards.	Dixaines de milliards.	Milliards,	Centaines de millions.	Dixaines de millions.	Millions,	Centaines de mille.	Dixaines de mille,	Mille,	Centaines.	Dixaines,	Nombres,

dont la valeur eſt de 774 *quatrilliards*, 427 *trilliards*, 328 *billiards*, 142 *milliards*, 759 *millions*, 842 *mille*, 560 *unités*.

I I.

DE L'ADDITION.

15. L'ADDITION eſt une opération qui ſert à joindre pluſieurs nombres de même eſpece, pour en former un ſeul qui les contienne tous, lequel ſe nomme la *ſomme* ou le *total* de tous les nombres propoſés.

Ainſi *additionner* 26 & 39, c'eſt trouver 65, qui eſt la ſomme de 26 & 39.

Maniere de faire l'Addition.

16. Pour additionner pluſieurs nombres donnés ou propoſés, on les poſera les uns ſous les autres, de maniere que les unités répondent aux unités, ou qu'elles ſoient dans la même colonne; que les dixaines répondent aux dixaines, les centaines aux centaines, &c. on tirera enſuite une ligne droite ſous tous ces nombres, & on commencera par ajou-

ter enſemble les chiffres de la colonne des unités, & autant de fois qu'il y aura dix unités dans cette colonne, on retiendra autant de fois 1, pour porter dans la colonne ſuivante; & on poſera dans la premiere colonne, ſous la ligne tracée, le nombre qui reſtera au deſſus de ces dixaines, s'il y en a un; ſinon, on y poſera un zero. On fera la même choſe pour l'addition de toutes les autres colonnes.

Soient, par exemple, les trois nombres, 456, 267 & 891 à additionner.

	456
	267
	891
Somme	1614

On les poſera les uns ſous les autres, comme on vient de l'enſeigner, & on commencera par additionner la colonne des unités, en diſant, 6 & 7 font 13, & 1 font 14; ce qui donne 1 dixaine & 4 de plus. On poſera 4 dans cette même colonne, & on retiendra 1 pour la colonne ſuivante.

Paſſant à cette colonne, on dira 1 de retenu & 5 font 6, & 6 font 12, & 9 font 21 : on poſera 1 dans cette ſeconde colonne, & on retiendra 2 pour la troiſieme.

Venant donc à cette colonne, on dira 2 de retenus & 4 font 6, & 2 font 8,

& 8 font 16 : on posera 6, & on retiendra 1. Mais comme il n'y a pas de quatrieme colonne pour y porter cette unité, on la posera à côté de 6, vers la gauche, en disant, *j'avance* 1, & on aura 1614 pour la somme des trois nombres proposés.

Il est évident, par l'opération, que le nombre qu'on vient de trouver, contient la somme de toutes les unités, de toutes les dixaines, & de toutes les centaines des nombres proposés, & qu'ainsi il est égal à tous ces trois nombres pris ensemble.

Remarques.

I.

17. Il est indifférent de commencer à compter par les chiffres d'en haut, comme on vient de le faire, ou par les chiffres d'en bas. Mais si après avoir fait l'addition en comptant par le haut, on la refait en comptant par le bas, & qu'on trouve la même somme, on pourra regarder l'opération comme faite exactement & sans erreur, n'étant pas à présumer que l'on fasse la même faute en comptant différemment.

II.

18. Les moyens qu'on emploie pour examiner ſi une opération eſt faite exactement, ſe nomment *ſa preuve* ; & les raiſons dont on ſe ſert pour faire voir qu'en pratiquant ce qui eſt preſcrit pour l'opération d'une regle, elle répond à l'effet qu'on s'en propoſe, ſe nomment la *démonſtration de la regle.*

Ainſi on a démontré l'opération de l'addition, lorſqu'on a fait voir, qu'en ſuivant ce que la regle preſcrit, la ſomme qui en réſulte contient toutes les parties des nombres propoſés, c'eſt-à-dire qu'elle contient tous ces nombres.

En pratiquant ce qui a été preſcrit pour l'addition précédente, il ſera aiſé de faire toutes autres ſortes d'additions. Ainſi il ſuffira d'en mettre ici pluſieurs exemples.

PREMIER EXEMPLE.

	456789
	204567
	800005
	780916
Somme....	2242277.

SECOND EXEMPLE.

	247807
	47234
	378173
	4567
	327
	25
Somme	678133.

TROISIEME EXEMPLE.

Si l'on a une armée composée de différentes nations, comme 10000 Hanovriens, 23550 Allemands, 27450 Russiens, 11745 Anglois, & 10728 Hollandois, on trouvera le nombre d'hommes de toute l'armée en additionnant ces différens corps de troupes.

	10000	Hanovriens.
	23550	Allemands.
	27450	Russiens.
	11745	Anglois.
	10728	Hollandois.
Total de l'armée	83473.	

DE L'ADDITION COMPOSÉE.

19. L'unité abstraite ou *numérique* se conçoit comme une espece de nombre

indivisible : mais lorsqu'elle représente une partie de la quantité, comme la partie d'argent en usage dans le commerce, qui se nomme *livre*, la toise dont on se sert pour mesurer, &c. elle se divise alors en plusieurs parties ; car la livre se divise en 20 parties égales qu'on appelle *sols*, & le sol en 12 parties égales appellées *deniers* ; la toise se divise en 6 *pieds*, le pied en 12 *pouces*, & le pouce en 12 *lignes*, &c. Or l'addition des nombres & des parties de l'unité dont ils sont accompagnés, est ce qu'on appelle *l'addition composée*.

20. Pour additionner, par exemple, les nombres 455 livres, 12 sols, 5 deniers, ou (en marquant les livres par ce signe ᵗᵗ qu'on pose au dessus du premier des unités, les sols par une ſ qu'on pose aussi au dessus, & les deniers par cette marque ₰) 455ᵗᵗ 12ſ 5₰, 245ᵗᵗ 10ſ 4₰, & 978ᵗᵗ 9ſ 8₰.

On posera les chiffres qui expriment les livres les uns sous les autres, comme dans l'addition simple, les sols sous les sols, ou à la même colonne, & les deniers de même sous les deniers, le tout comme on le voit à la page suivante.

	455 ₶ -- 12 ſ -- 5 ₰
	245 — 10 — 4
	978 — 9 — 8
Total.	1679 ₶ -- 12 ſ -- 5 ₰

On commencera enſuite cette addition par les deniers, en diſant 5 & 4 font 9, & 8 font 17; & comme dans 17 deniers il y a un ſol (puiſqu'il vaut 12 deniers) & 5 deniers de reſte, on poſera 5 à la colonne des deniers, & on retiendra 1, c'eſt-à-dire, 1 ſol, qu'on portera à la colonne des ſols.

Paſſant donc à cette colonne, on dira, 1 de retenu & 2 font 3, & 9 font 12; on poſera 2 à cette colonne, & on retiendra 1, c'eſt-à dire, une dixaine de ſols, pour porter à la colonne des dixaines de ſols. On dira enſuite, en allant à cette colonne, 1 de retenu & 1 font 2, & 1 font 3, qui étant des dixaines de ſols, dont il faut 2 pour faire une livre, font 1 livre & 1 dixaine : on poſera donc la dixaine, & on retiendra 1 livre qu'on portera aux livres, & on achevera l'addition comme les additions ſimples.

REMARQUE.

21. Comme il faut 2 dixaines de ſols pour faire une livre, il eſt clair que la moitié des dixaines de ſols donne tout d'un coup le nombre de livres qu'elles valent. Ainſi quand le nombre en eſt *pair*, c'eſt-à-dire, qu'il ſe diviſe exactement en deux parties, ſans reſte, on poſe zero dans l'addition, à la colonne des dixaines de ſols, & l'on retient la moitié de ces dixaines, comme autant de livres qu'on porte aux livres. Si les dixaines de ſols ſont en nombre *impair*, c'eſt-à-dire, ſi l'on ne peut en prendre la moitié ſans reſte, comme, par exemple, s'il y en a 7, on prendra la moitié de 7 qui eſt 3, pour ſix, il reſtera 1 dixaine que l'on poſera à la colonne des dixaines, & l'on retiendra 3 livres, c'eſt-à-dire, la moitié des dixaines paires que 7 contient, pour les porter aux livres, & l'on achevera l'addition comme dans l'exemple précédent.



Exemples d'Additions composées.

	378^{l}	$13^{ſ}$	9^{d}.
	107	11	11
	976	14	10
	387	15	9
	837	14	8
Total	2688^{l}	$10^{ſ}$	11^{d}.

	270^{l}	$00^{ſ}$	3^{d}.
	457	10	9
	389	19	0
	175	18	10
	300	15	9
	37	01	3
Total	1631^{l}	$05^{ſ}$	10^{d}.

22. Si l'on a des toiſes, des pieds, des pouces & des lignes à additionner enſemble, on les poſera de même les uns ſous les autres, comme on l'a fait pour les livres, les ſols & les deniers, c'eſt-à-dire, les toiſes ſous les toiſes, les pieds ſous les pieds, &c. & ſçachant que la *toiſe* a 6 *pieds*, le *pied* 12 *pouces*, & le *pouce* 12 *lignes*, on fera cette addition comme celle des livres, ſols & deniers.

23. Pour cela, on commencera l'ad-

dition par les lignes, & autant de fois qu'il y en aura 12, on retiendra autant de pouces pour porter à la colonne des pouces, posant à la colonne des lignes ce qui s'en trouvera de reste, après en avoir ôté tous les pouces qu'elles contiennent. S'il n'y a point de reste, on posera zero à cette colonne.

On additionnera de même tous les pouces auxquels on joindra d'abord ceux que l'addition des lignes aura donnés, & on retiendra pour la colonne des pieds autant de pieds qu'il y aura de fois 12 dans la somme de tous les pouces, posant, comme à la colonne des lignes, les pouces qui se trouveront excéder le nombre de fois 12 qu'ils contiendront.

Passant ensuite à la colonne des pieds, on y portera d'abord ceux que les pouces auront donnés, qu'on joindra avec tous les autres pieds, & l'on retiendra autant de toises pour la colonne des toises, que l'addition de tous les pieds contiendra de fois 6. Si la somme de tous les pieds contient plusieurs fois 6 avec un reste, on posera ce reste à la colonne des pieds, ensuite on achevera l'addition de la même maniere que pour les livres, les sols & les deniers.

EXEMPLE.

24. Soient proposés à additionner les trois quantités, 345 toises, 4 pieds, 8 pouces, 5 lignes; 297 toises, 2 pieds, 6 pouces, 4 lignes, & 679 toises, 5 pieds, 10 pouces, 10 lignes.

	345 toises	4 pieds	8 pouces	5 lignes.
	297 —	2 —	6 —	4
	679 —	5 —	10 —	10
Total	1323 toises	1 pied	1 pouces	7 lignes.

Ayant posé les toises, les pieds, les pouces, &c. les uns sous les autres, comme on le voit dans l'exemple figuré, on commencera par additionner les lignes, en disant 5 & 4 font 9 & 10 font 19, dans lequel nombre il y a une fois 12 & 7 de reste, c'est pourquoi on posera 7, & on retiendra 1 pour porter à la colonne des pouces.

Passant à la colonne, on dira 1 de retenu & 8 font 9 & 6 font 15, & 10 font 25. Dans 25 il y a deux fois 12 & 1 de reste : on posera donc 1 à cette colonne, & on retiendra 2 pour la colonne des pieds.

Allant ensuite à la colonne des pieds,

on dira 2 de retenus & 4 font 6, & 2 font 8, & 5 font 13. Or, comme en 13 il y a deux fois 6 & 1 de reſte, on poſera 1 à cette colonne, & l'on portera les deux toiſes de retenues à la colonne des toiſes, diſant 2 & 5 font 7, &c. On achevera enſuite cette addition comme celle des livres, des ſols & des deniers; ce qui n'a aucune difficulté.

De l'Addition des autres eſpeces.

25. Quelques différentes choſes que l'on ait à additionner, on en trouvera toujours la ſomme en commençant l'opération par les plus petites parties dans leſquelles l'unité eſt diviſée; on paſſera de celles-ci à celles qui ſont immédiatement plus grandes, en leur ajoutant autant d'unités qu'on aura trouvé de fois, dans la premiere addition, le nombre de parties qu'elles contiennent des plus petites, & ainſi ſucceſſivement, juſqu'à ce que l'on ſoit parvenu aux entiers, qu'on additionnera comme dans tous les exemples qui précédent.

De la Preuve de l'Addition compoſée.

26. La preuve des additions compoſées ſe fera de la même maniere que

celle des additions ſimples, c'eſt-à-dire, qu'après avoir fait l'opération, en commençant à compter par les chiffres d'en haut, on la fera une ſeconde fois, en commençant par les chiffres d'en bas. Il eſt évident qu'il doit ſe trouver la même ſomme dans chacune de ces additions différentes. On donnera dans la ſuite une preuve plus réguliere de cette opération.

III.

DE LA SOUSTRACTION.

27. LA *Souſtraction* eſt une opération par laquelle on retranche un nombre d'un plus grand de même eſpece, pour en connoître la différence.

Ainſi retrancher ou *ſouſtraire* 28 de 35, c'eſt ôter 28 de 35, pour trouver le nombre 7 qui eſt la différence de ces deux nombres. Cette différence ou cet excédent du plus grand nombre ſur le plus petit, ſe nomme auſſi quelquefois *le reſte*.

Il eſt évident que le nombre qu'on veut retrancher d'un autre, doit tou-

jours être plus petit que ce nombre, n'étant pas poſſible, par exemple, de ſouſtraire 6 de 4, non plus que 12 de 9, &c.

28. Pour ſouſtraire d'un nombre tel qu'on voudra, un autre nombre plus petit, on poſera celui-ci ſous le plus grand, de maniere que les unités, les dixaines, les centaines, &c. de ces deux nombres, ſoient dans les mêmes colonnes, comme dans l'addition, & enſuite on retranchera de toutes les parties du nombre ſupérieur, celles de l'inférieur.

29. Par exemple, pour ſouſtraire de 6564, 2431, on poſera ce dernier nombre ſous le premier: ſçavoir, les unités ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, & après avoir tiré une ligne ſous le ſecond nombre, on dira, en commençant par les unités du plus grand nombre; qui de 4 ôte 1, reſte 3, qu'on poſera dans la colonne des unités. Enſuite, paſſant à la ſeconde colonne, on dira, qui de 6 ôte 3, reſte 3, qu'on poſera dans cette même colonne, comme on le voit dans l'exemple figuré. Paſſant à la colonne des centaines, on

	6564
	2431
Reſte	4133
Preuve	6564

dira qui de 5 ôte 4, reſte 1, qu'on poſera auſſi dans cette même colonne. Enfin étant parvenu à la derniere, on dira, qui de 6 ôte 2, reſte 4, qu'on poſera dans cette derniere colonne, à côté des autres reſtes; & l'on aura 4133 pour le reſte ou la différence des deux nombres propoſés.

Preuve de la ſouſtraction.

30. Pour faire la preuve de cette régle, il faut remarquer que la différence des deux nombres donnés, ou, ce qui eſt la même choſe, l'excédent du plus grand ſur le plus petit, étant ajouté à ce nombre plus petit, doit le rendre égal au grand, & qu'ainſi ſi on a bien opéré, l'addition du nombre 2431, & du reſte 4133, doit donner le nombre ſupérieur 6564. Faiſant donc cette addition, comme elle donne le nombre 6564, on doit en conclure que la ſouſtraction eſt faite exactement.

31. Lorſque les chiffres du nombre à ſouſtraire, ſe trouvent tous moindres que ceux du nombre dont ils doivent être ſouſtraits, comme dans l'exemple qu'on vient de voir, la ſouſtraction ſe fera toujours très-facilement; mais lorſ-

qu'il s'en trouvera de plus grands dans les colonnes du ſecond, que dans les correſpondantes du premier, l'opération paroîtra avoir un peu plus de difficulté. Il faut donner le moyen de la rendre tout auſſi aiſée que celle du précédent exemple.

32. Soit le nombre 56234, dont on veut ſouſtraire 48956.

De	56234
ôter	48956
reſte	7278
Preuve	56234

On poſera le ſecond ſous le premier, comme dans l'exemple précédent, & on dira, commençant toujours l'opération par les unités, qui de 4 ôte 6, cela ne ſe peut; car on ne peut d'un nombre quelconque en retrancher ou ôter un plus grand. Pour faire l'opération, on prendra une unité ſur le 3 de la colonne des dixaines, laquelle étant portée ſur celle des unités, en vaudra 10, lequel nombre joint avec le 4 de cette colonne des unités, fait 14. Alors de 14 on peut en ôter 6, & il reſte 8, qu'on poſera dans la colonne des unités.

Paſſant à la ſeconde colonne, le chiffre 3 ne vaut plus que 2 unités de cette colonne, on dira donc, qui de 2 ôte 5, cela

cela ne se peut; il faudra prendre une unité sur le chiffre 2 de la troisieme colonne, laquelle unité en vaudra 10 de la seconde. Ces 10 unités jointes aux deux qui restoient dans cette colonne, font 12. Or, qui de 12 ôte 5, reste 7, qu'on posera dans la seconde colonne.

Venant à la troisieme, le chiffre 2 ne vaut plus qu'une unité. Ainsi il faut dire, qui de 1 ôte 9, cela ne se peut : il faut donc avoir recours à la quatrieme colonne, prendre une unité sur le 6 de cette colonne, laquelle unité en vaudra 10 de celle de la troisieme. Ces 10 unités jointes avec celle qui restoit à cette troisieme colonne, font 11, desquelles ôtant 9, reste 2, qu'ou posera à la troisieme colonne.

Allant après cela à la quatrieme colonne, le 6 ne vaut plus que 5 unités. Or, qui de 5 ôte huit, cela ne se peut: il faut prendre une unité sur la cinquieme colonne, laquelle en vaudra 10 sur la quatrieme, & ces 10 unités jointes avec les 5 qui restent à cette colonne, valant 15, on dira, qui de 15 ôte 8, reste 7, qu'on posera à cette colonne.

Etant ainsi parvenu à la cinquieme colonne, qui dans cet exemple est la derniere, le 5 de cette colonne ne vaut

plus que 4 unités : c'eſt pourquoi on dira qui de 4 ôte 4, reſte zero, qu'on poſera ſi l'on veut; & n'y ayant plus de chiffres dans le nombre ſupérieur l'opération eſt achevée, & l'on a 7278 pour l'excédent ou la différence du premier ſur le ſecond.

On en fera la preuve comme dans le premier exemple, c'eſt-à-dire, en ajoutant au ſecond nombre la quantité 7278 dont il differe du premier, & trouvant par l'addition ce premier, il s'enſuit que l'opération eſt exacte.

REMARQUES.

I.

33. La pratique de cette regle ſe concevra fort aiſément en ſe rappellant ce qu'on a vu dans la numération, je veux dire, qu'une unité d'un nombre en vaut 10 ſur celui qui le précede immédiatement à droite.

II.

34. A l'égard de la démonſtration de l'opération, elle ſe tire clairement de la pratique qu'on y a obſervée; car il eſt clair qu'en prenant la différence de toutes les parties du premier nombre, de

celles du ſecond, on a la différence du premier au ſecond.

Pour ſouſtraire de même de 90800, le nombre 17597, après les avoir poſés l'un ſur l'autre, comme dans les exemples qui précedent, on dira d'abord, qui de zero ôte 7, cela ne ſe peut. On prendra une unité ſur le 8 de la troiſieme colonne, laquelle étant poſée ſur le premier zero à ſa droite, vaudra 10 unités de la colonne de ce zero. Prenant enſuite une unité de ces 10, il en reſtera 9 à la ſeconde colonne, & l'unité priſe à cette ſeconde, en vaudra 10 à la premiere. Ainſi, après cet arrangement, on dira, qui de 10 ôte 7, reſte 3, qu'on poſera dans la premiere colonne.

Qui de	90800
ôte	17597
reſte	73203
Preuve	90800

Venant après à la ſeconde, ſur laquelle on a laiſſé 9 unités, on dira, qui de 9 ôte 9, reſte zero, qu'on poſera ſous le 9 à l'ordinaire.

Etant parvenu à la troiſieme colonne où le 8 ne vaut plus que 7, on dira, qui de 7 ôte 5, reſte 2, qu'on poſera auſſi ſous le 5.

Paſſant à la quatrieme, on dira qui

de zero ôte 7, cela ne ſe peut. Il faudra prendre une unité ſur le 9 de la cinquieme colonne, laquelle unité en vaudra 10 ſur la quatrieme ; & dire enſuite, qui de 10 ôte 7, il reſte 3, qu'on poſera ſous le 7.

Enfin venant à la cinquieme colonne où le 9 ne vaut plus que 8 unités, on dira, qui de 8 ôte 1, reſte 7, qu'on poſera dans cette cinquieme colonne, & l'on aura 73203 pour la différence des deux nombres propoſés. On fera la preuve de cette opération comme dans les exemples précédens.

Si l'on a bien compris ce qui vient d'être pratiqué dans les deux derniers exemples, on ne trouvera aucune difficulté dans les autres qu'on pourra propoſer : c'eſt pourquoi on ſe contentera d'en joindre ici pluſieurs, qui aideront encore les commençans à ſe rendre plus familiere la pratique de la ſouſtraction.

Exemples de ſouſtractions ſimples.

Qui de	9000471000
ôte	7178756784
reſte	1821714216
Preuve	9000471000

Qui de	17110011071
ôte	9875678797
reſte	7234332274
Preuve	17110011071

Qui de	800000000
ôte	170798340
reſte	629201660
Preuve	800000000

SOUSTRACTION COMPOSÉE.

35. *La ſouſtraction composée*, eſt celle dans laquelle les entiers ſont accompagnés des parties de l'unité, comme les livres, de ſols & de deniers ; les toiſes, de pieds, pouces, &c.

36. Soit la ſomme de 4507 l. 12 ſ. 4 d. dont on veut ſouſtraire celle de 3678 l. 18 ſ. 10 d.

Qui de	4507 l.	12 ſ.	4 d.
ôte	3678	18	10
reſte	828	13	6
Preuve	4507 l.	12 ſ.	4 d.

Après les avoir posées l'une sous l'autre, comme dans la soustraction simple, on commencera l'opération par les plus petites parties dans lesquelles l'unité se divise, c'est-à-dire, dans cet exemple, par les deniers. On dira donc, qui de 4 deniers ôte 10, cela ne se peut. On prendra 1 sol sur le 2 de la colonne des sols, lequel vaut 12 unités de celle des deniers, & l'on dira 12 & 4 font 16, & qui de 16 ôte 10, reste 6, qu'on posera à la colonne des deniers.

Venant à la colonne des sols, dans laquelle le 2 ne vaut plus qu'une unité, on dira, qui de 1 ôte 8, cela ne se peut, mais prenant l'unité qui est aux dixaines des sols, elle vaudra 10 sols à la colonne des sols. Or 10 & 1 font 11; & qui de 11 ôte 8, reste 3, qu'on posera sous le 8, à la colonne des sols.

Venant après cela à la colonne des dixaines de sols, l'unité de cette colonne ne vaut plus rien. Or, qui de rien ôte 1, cela ne se peut. Il faudra donc passer à la colonne des livres, prendre une livre sur le 7 de cette colonne, laquelle livre portée aux dixaines de sols, en vaudra deux unités, & alors on dira; qui de 2 ôte 1, reste 1, qu'on posera à la colonne des dixaines de sols.

Cela étant fait, on paſſera aux livres où le 7 ne vaut plus que 6. On dira donc, qui de 6 ôte 8, cela ne ſe peut; & comme la colonne des dixaines eſt remplie par un zero, on prendra une unité ſur le 5 de celle des centaines, laquelle étant portée ſur les dixaines, vaudra 10 unités; prenant auſſi une unité de ces 10, & la portant à la colonne des unités, elle en vaudra 10. Or, 10 & 6 font 16, & qui de 16 ôte 8, reſte 8, qu'on poſera à la colonne des unités des livres: l'on achevera enſuite l'opération comme dans la ſouſtraction ſimple.

Pour retrancher de même de 40000 l. 00 ſ. 0 d. 27187 l. 13 ſ. 9 d.

	39999 l.	19 ſ.	12 d.
Qui de	40000	00	0
ôte	27187	13	9
reſte	12812 l.	06 ſ.	3 d.
Preuve	40000 l.	00 ſ.	0 d.

On les poſera les uns ſous les autres, à l'ordinaire; & comme il n'y a ni ſols, ni deniers dans le nombre ſupérieur, & que toutes les colonnes des entiers, à l'exception de la premiere à gauche, ſont remplies par des zero, il faudra

prendre une unité sur le 4 de la cinquieme colonne, laquelle étant portée sur la quatrieme, en vaudra 10 de cette colonne. Il faudra ensuite prendre une unité des 10 de cette colonne, la porter sur la troisieme, & alors il restera 9 unités à la quatrieme, & la troisieme vaudra 10 unités. On prendra une unité des 10 de cette troisieme, laquelle étant posée à la seconde, en vaudra 10 de cette seconde, & il en restera ainsi 9 à la troisieme. Sur les 10 unités de la seconde colonne, on en prendra 1, qu'on portera sur la premiere qui en vaudra 10 de cette premiere; il en restera 9 à la seconde, & alors la premiere colonne des livres vaudra 10 unités. On en prendra une, c'est-à-dire, une livre ou 20 sols, dont on imaginera une dixaine de sols au dessus des dixaines des sols du nombre inférieur; puis 9 sols à côté, & enfin un sol ou 12 deniers au dessus des deniers du même nombre.

Ensorte que par cette disposition le nombre supérieur 40000 l. deviendra 39999 l. 19 f. 12 d., ainsi qu'on l'a marqué en plus petit caractere au dessus. On en retranchera l'inférieur, comme dans l'exemple précédent, disant : qui de 12 deniers ôte 9, reste 3, qu'on

posera aux deniers. Puis, qui de 9 sols ôte 3 sols, reste 6 sols, qu'on posera aux sols. Ensuite, qui d'une dixaine de sols ôte une dixaine pareille, reste zero qu'on posera aux dixaines de sols; passant ensuite aux livres, qui de 9 ôte 7, reste 2, &c.

37. Pour soustraire de 454 toises 2 pieds 6 pouces 3 lignes, 367 toises 5 pieds 8 pouces 7 lignes, on les posera l'un sous l'autre, comme on vient de le faire pour les livres, les sols & les deniers, & on dira: qui de 3 lignes en ôte 7,

Qui de	454 toises	2 pieds	6 pouces	3 lignes.
ôte	367	5	8	7
reste	86	2	9	8
Preuve	454 toises	2 pieds	6 pouces	3 lignes.

cela ne se peut: on prendra un pouce à la colonne des pouces qui vaut 12 lignes; & comme 12 & 3 font 15, on dira, qui de 15 ôte 7, reste 8 qu'on posera aux lignes.

Passant à la colonne des pouces, dans laquelle le 6 ne vaut plus que 5, on dira: qui de 5 ôte 8, cela ne se peut; on prendra un pied sur la colonne des pieds, lequel vaut 12 pouces; & comme 12

& 5 font 17, on dira, qui de 17 pouces en ôte 8, reſte 9, qu'on poſera à la colonne des pouces.

Allant enſuite à la colonne des pieds, dans laquelle le 2 ne vaut plus qu'une unité, on dira, qui de 1 ôte 5, cela ne ſe peut : on prendra une unité ſur le 4 des unités des toiſes, laquelle valant 6 pieds, on dira 6 & 1 font 7, & qui de 7 ôte 5, reſte 2, qu'on poſera à la colonne des pieds.

On paſſera après cela à la colonne des toiſes où le chiffre 4 des unités ne vaut plus que 3, & l'on achevera l'opération de la même maniere que les précédentes.

Application de la ſouſtraction à des exemples.

PREMIER EXEMPLE.

38. *Un Particulier eſt né en l'année 1678 le 25 mai, on demande quel eſt ſon âge le 16 juillet 1746.*

Il eſt clair que l'âge de ce Particulier n'eſt autre choſe que la différence du 16 juillet 1746, au 25 mai 1678, & qu'ainſi, pour le trouver, il faut ſouſtraire le ſecond du premier.

Pour arranger cette ſouſtraction, je

pose d'abord 1746 années, 6 mois & 16 jours, parce qu'au 16 juillet il y a 6 mois de l'année écoulés, plus 16 jours; sous ce nombre je pose 1678, 4 mois & 25 jours, parce qu'au 25 mai il y avoit 4 mois & 25 jours de l'année d'écoulés.

Qui de	1746 années	6 mois	16 jours.
ôte	1678	4	25
reste	68 années	1 mois	21 jours.
Preuve	1746 années	6 mois	16 jours.

Je dis ensuite, qui de 16 jours ôte 25 jours, cela ne se peut: c'est pourquoi je prends un mois à la colonne des mois, lequel vaut 30 jours; & comme 30 & 16 font 46, je dis, qui de 46 ôte 25, il reste 21, que je pose à la colonne des jours.

Passant à celle des mois, je dis, qui de 5 mois ôte 4 mois, reste 1 mois, que je pose aux mois.

Allant après cela à la colonne des années, on achevera la regle à l'ordinaire, & l'on aura 68 années 1 mois & 21 jours pour l'âge demandé.

REMARQUES.

I.

39. Au lieu de 1746 dans le nombre ſupérieur, il auroit fallu mettre 1745, parce que l'année 1746 n'eſt révolue qu'au dernier Décembre 1746. Ainſi on a mis une année de trop dans ce nombre; mais comme on en a mis auſſi une de trop par la même raiſon dans l'inférieur, la différence de ces deux nombres eſt la même que celle qu'on auroit trouvée en les diminuant chacun d'une unité

II.

40. Si le nombre des mois du nombre ſupérieur avoit été moindre que celui de l'inférieur, on auroit pris une unité ſur la colonne des années, c'eſt-à-dire, qu'on auroit pris 12 mois qu'on auroit ajoutés avec les mois du nombre ſupérieur, après quoi l'opération n'auroit plus eu aucune difficulté.

SECOND EXEMPLE.

On ſuppoſe une armée de 56700 hommes, & que dans une bataille il y en ait eu 3745 de tués, on demande le reſte du nombre de l'armée.

Il eſt évident qu'il faut ſouſtraire le ſecond nombre du premier, & que le reſte donnera le nombre d'hommes dont l'armée eſt compoſée après la bataille.

Qui de	56700	*hommes.*
ôte	3745	*hommes.*
reſte	52955	*hommes.*
Preuve	56700	*hommes.*

TROISIEME EXEMPLE.

Il a été mené 1411200 livres de poudre au dernier ſiege de Turin; il en eſt reſté 234440 livres, on demande quel eſt le nombre de livres de poudre qui a été conſommé à ce ſiege.

Il eſt clair qu'il ne faut que ſouſtraire des poudres menées devant Turin, la quantité qui en eſt reſtée, & que le reſte ou la différence de ces deux quantités, donnera celle de la conſommation qu'on demande.

Qui de	1411200	*livres de poudre.*
ôte	234440	
reſte	1176760	*liv. pour la conſomm.*
Preuve	1411200	

De la preuve de l'addition par la soustraction.

41. Dans l'article de l'addition on n'a pu donner cette preuve, parce qu'on n'avoit point encore parlé de la soustraction qu'elle suppose. Mais comme la soustraction est la véritable preuve de l'addition, & que par cette raison on ne doit pas l'ignorer, on va suppléer ici en peu de mots à l'omission qu'on en a faite.

A.	4274 l.	13 s.	4 d.
B.	8756	14	11
C.	8709	10	10
D.	9877	17	7
E.	8756	19	9
G.	40375 l.	16 s.	5 d.
H.	36101	03	1
K.	4274 l.	13 s.	4 d.

Soit le nombre marqué par G, l'addition ou la somme des nombres marqués par A, B, C, D & E. Si l'opération est exacte, G doit être égal à tous les nombres A, B, C, &c.

Soit faite enſuite une ſeconde addition de B, C, D & E, dans laquelle on ne comprenne point le nombre A, qu'on a pour cela ſéparé des autres par une ligne ponctuée, & ſoit H la ſomme de cette ſeconde addition, il eſt évident qu'elle doit être plus petite que la premiere du nombre A, qu'on n'y a point compris; enſorte que G doit ſurpaſſer H de la quantité A.

C'eſt pourquoi, ſi l'opération eſt exacte, ôtant de G le nombre H, on doit trouver le nombre A. Faiſant donc la ſouſtraction, on a le nombre K de 4274 l. 13 ſ. 4 d. Or le nombre A eſt la même choſe : donc l'addition a été faite ſans erreur, c'eſt-à-dire, que G eſt la ſomme des nombres A, B, C, D & E.

Remarque.

42. L'addition & la ſouſtraction ſe ſervent réciproquement de preuve; car la ſouſtraction a été prouvée par l'addition, puiſqu'on l'a faite en ajoutant au moindre nombre la différence au plus grand, & l'on vient de voir que la ſouſtraction ſert également de preuve à l'addition.

I V.

DE LA MULTIPLICATION.

43. MULTIPLIER un nombre par un autre, c'eſt prendre le premier autant de fois que l'unité eſt contenue dans le ſecond.

Ainſi multiplier 4 par 3, c'eſt prendre 4 trois fois, ou, ce qui eſt la même choſe, c'eſt trouver le nombre 12 qui contient autant de fois 4 qu'il y a d'unités dans 3, c'eſt-à-dire, 3 fois.

44. Le nombre que l'on multiplie ſe nomme le *multiplié* ou le *multiplicande*. Celui par lequel on le multiplie ſe nomme le *multiplicateur*; & le troiſieme nombre qu'on trouve par la multiplication des deux premiers, ſe nomme *le produit*.

Dans l'exemple de la multiplication de 4 par 3, 4 eſt le multiplicande, 3 le multiplicateur, & 12 le produit.

REMARQUE.

45. Pour n'être point embarraſſé dans la multiplication, il eſt abſolument né-

cessaire de sçavoir multiplier par cœur tout nombre plus petit que 10 par tout nombre aussi au dessous de 10, c'est-à-dire, le produit de tous les nombres depuis 1 jusqu'à 10.

La Table que l'on joint ici peut servir à apprendre en fort peu de temps la multiplication de ces nombres. Il est à propos, en opérant, d'en avoir une devant soi pour la consulter, jusqu'à ce que ces petites multiplications d'un chiffre par un autre chiffre, soient devenues familieres.

TABLE.								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

46. Pour faire usage de cette Table, il faut chercher dans le rang supérieur le chiffre que l'on veut multiplier, &

dans la premiere colonne à gauche, celui par lequel on veut le multiplier. On trouvera le produit de ces deux chiffres dans la caſe qui ſera commune à la colonne du multiplicande & au rang du multiplicateur.

Par exemple, pour multiplier 8 par 7, on cherchera 8 dans le rang du haut de la table, & 7 dans la premiere colonne de la gauche : on parcourra enſuite le rang où eſt 7, juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à la caſe 56, qui répond à la colonne de 8 & au rang de 7. Le nombre 56 de cette caſe ſera le produit de 8 par 7. Il en ſera de même de tous les autres produits depuis 1 fois 1 juſqu'à celui de 9 par 9, qui eſt 81.

Pratique de la Multiplication.

47. Pour multiplier tel nombre qu'on voudra, comme par exemple, 345 par un autre quelconque 6, on poſera le multiplicateur 6 ſous le chiffre 5 des unités du multiplicande; & l'on tirera enſuite une ligne ſous ces deux nombres.

	345
	6
Produit	2070

On dira après cela, 6 fois 5 font 30.

On posera o à la colonne des unités, & l'on retiendra 3 pour la colonne suivante.

On multipliera de même le chiffre 4 des dixaines du multiplicande par 6, en disant, 6 fois 4 font 24, & 3 de retenu font 27. On posera 7 à la seconde colonne, & on retiendra 2 pour la suivante.

On passera à la troisieme colonne, & on dira, 6 fois 3 font 18, & 2 de retenu font 20. On posera zero à la colonne des centaines; & comme il n'y a plus de chiffres à multiplier dans le multiplicande, on avancera 2 pour former une quatrieme colonne : ainsi on aura 2070 pour le produit de 345 par 6.

DÉMONSTRATION.

Il est clair par l'opération, que l'on a multiplié tout le nombre 345 par 6, puisque toutes ses parties l'ont été par ce même nombre.

48. Pour multiplier de même 1781 par 24, on posera ces nombres; sçavoir, le multiplicateur 24 sous le multiplicande, & de maniere que les unités soient sous les unités, & les dixaines sous les dixaines.

Après avoir tiré une ligne ſous ces deux nombres, on dira, en commençant à multiplier les unités du multiplicande par celles du multiplicateur, ce qui ſe pratiquera toujours, on dira,

	1781
	24
	7124
	3562.
Produit	42744

dis-je, 4 fois 1 font 4, & on poſera 4 à la colonne des unités. Paſſant enſuite aux dixaines du multiplicande, on dira, 4 fois 8 font 32 : on poſera 2 à la ſeconde colonne, & l'on retiendra 3. Allant après aux centaines du multiplicande, on dira, 4 fois 7 font 28, & 3 de retenu font 31 : on poſera 1 à la troiſieme colonne, & on retiendra 3 unités pour la ſuivante, à laquelle étant parvenu, on dira, 4 fois 1 font 4, & 3 de retenu font 7, on poſera 7 à cette quatrieme colonne. On aura alors 7124 pour le produit du multiplicande par 4.

On multipliera après cela ce même multiplicande par le ſecond chiffre du multiplicateur. Pour cet effet on dira, 2 fois 1 font 2, qu'on poſera à la ſeconde colonne du premier produit, c'eſt-à-dire, dans la même que celle du chiffre 2 par lequel on multiplie. On dira

ensuite, passant à la seconde colonne du multiplicande, 2 fois 8 font 16, on posera 6 à la troisieme colonne du produit, & on reriendra 1. Allant après à la troisieme colonne du multiplicande, on dira, 2 fois 7 font 14, & 1 de retenu font 15; on posera 5 à la quatrieme colonne du produit, & l'on retiendra 1 pour la suivante. Etant enfin parvenu à la derniere colonne du multiplicande, on dira, 2 fois 1 font 2, & 1 de retenu font 3, & on posera 3 en l'avançant vers la gauche pour former une cinquieme colonne au produit. On mettra un point sous le chiffre 4 des unités du premier produit, qui servira à marquer plus exactement que le premier chiffre du second produit est à la seconde colonne du premier, & l'on aura pour ce second produit 35620.

On tirera une ligne sous ces deux produits, après quoi on les additionnera ensemble, & l'on trouvera 42744 pour le produit total.

Remarques.

I.

49. Quelque nombre de chiffres qu'il y ait dans le multiplicateur, on multi-

pliera ſucceſſivement tout le multiplicande par chacun de ces chiffres, & l'on aura ainſi autant de produits particuliers qu'il y aura de chiffres dans le multiplicateur.

II.

50. On obſervera toujours de mettre le premier chiffre du produit de chacune des multiplications partiales, ſous le chiffre du multiplicateur, par lequel ce produit eſt formé, & d'avancer enſuite les autres ſucceſſivement ſous les colonnes qui vont de droite à gauche.

Par exemple, ſi on ſuppoſe que le multiplicateur a 4 chiffres, le premier chiffre du produit du premier chiffre du multiplicateur par celui du multiplicande, ſera poſé à la colonne des unités; celui du ſecond chiffre du multiplicateur par le premier du multiplicande ſera mis à la colonne des dixaines; le premier chiffre du produit du troiſieme du multiplicateur par le premier du multiplicande, ſera mis à la colonne des centaines; & enfin celui du quatrieme chiffre du même multiplicateur par le premier du multiplicande, à la quatrieme colonne; & ainſi de ſuite, ſi le multiplicateur avoit un plus grand nombre de chiffres,

L'on marquera par des points ou des zero les colonnes des unités, des dixaines, des centaines, &c. laiſſées vers la droite au devant des produits du ſecond, du troiſieme, &c. chiffres du multiplicateur par le premier du multiplicande.

51. La raiſon de cet arrangement conſiſte en ce que le produit d'un chiffre quelconque du multiplicateur par celui des unités du multiplicande, eſt toujours de la même nature de celui du multiplicateur; c'eſt-à-dire, que ſi le chiffre du multiplicateur eſt aux dixaines, ce produit donne des dixaines, & qu'il donne des centaines s'il eſt aux centaines, &c. ce qui eſt évident: car, par exemple, le troiſieme chiffre du multiplicateur, qui eſt aux centaines, multiplié par le chiffre des unités du multiplicande, produit des centaines. Son quatrieme, qui eſt à la colonne des milles, produit des milles, multiplié par le même premier chiffre du multiplicande. Donc il faut placer le premier chiffre de ces produits à la colonne des centaines, des milles, &c. c'eſt-à-dire, dans la même colonne qui eſt occupée par le chiffre du multiplicateur, par lequel on multiplie le multiplicande.

III.

52. Lorſqu'il ſe trouve des zero à la droite du multiplicande & du multiplicateur, on multiplie ſeulement enſemble les chiffres de chacun de ces deux nombres, & on ajoute à leur produit autant de zero qu'il y en a à la droite de chacun d'eux.

Par exemple, pour multiplier 4800 par 600, on multipliera ſeulement 48 par 6, & on ajoutera 4 zero au produit, qui ſera ainſi de 2880000.

	48
	6
Produit	2880000

Pour faire voir la raiſon de cette opération abregée, il n'y a qu'à multiplier à l'ordinaire 4800 par 600, & alors comme le chiffre 6 du multiplicateur eſt aux centaines, ſon produit par le premier chiffre du multiplicande, doit être auſſi à la même colonne. Pour cela il faut faire précéder ce produit des 2 zero qui précédent 6, & alors multipliant 4800 par 6, on aura d'abord 6 fois zero qui font zero, qu'on poſera à la troiſieme colonne

	4800
	600
Produit	2880000

colonne, & encore ensuite 6 fois zero qui sont de même zero, qu'on posera à la quatrieme colonne. Puis 6 fois 8 qui font 48 : on posera 8 à la cinquieme colonne, & l'on retiendra 4 pour la sixieme : ensuite 6 fois 4 font 24, & 4 de retenu font 28, on posera 8 à la sixieme colonne, & l'on avancera 2 à la septieme. Or ce produit est 2880000, c'est-à-dire, le même qu'on a d'abord eu en multipliant 48 par 6, & en ajoutant à leur produit la somme des zero de la droite de chacun de ces nombres.

53. Il suit delà, que pour multiplier un nombre quelconque par un autre composé de l'unité suivie de plusieurs zero, comme par 10, 100, 1000, &c. il ne faut que placer à la droite du multiplicande les zero du multiplicateur.

IV.

54. Le zero ou le rien ne peut multiplier aucun nombre; car 5 fois rien ou 1000 fois rien ne font rien : c'est pourquoi lorsqu'il s'en trouve parmi les chiffres du multiplicateur, & qu'on est parvenu à leur colonne, on passe tout de suite à la suivante.

Soit par exemple 455 à multiplier

	455
	304
	1820
	1365..
Produit	138320

par 304. On multipliera d'abord le multiplicande par 4, ce qui donnera le premier produit 1820. Mais comme à la seconde colonne du multiplicateur il se trouve un zero, & que zero multiplié par 5 ne fait rien, il faut passer au troisieme chiffre 3 du multiplicateur, & dire, 3 fois 5 font 15, observant de poser 5 dans la colonne du 3, c'est-à-dire, à la troisieme colonne, & de retenir une unité pour continuer l'opération en allant vers la gauche, &c.

55. Lorsqu'il se trouve aussi des zero parmi les chiffres du multiplicande, & qu'on est parvenu à une colonne occupée par un zero, on met dans la colonne du produit, qui répond à ce zero, les unités qu'on retient de la multiplication du chiffre précédent; & si l'on ne retient rien, on met zero dans cette colonne.

Par exemple, soit 3005 à multiplier par 350. Après avoir écrit le multiplicateur 350 sous le multiplicande, & posé zero, pour marquer la colonne des unités du produit, à cause que le premier chiffre du multiplicateur est zero,

& qu'ainsi il faut commencer la multiplication par son second chiffre 5, on dira ensuite, 5 fois 5 font 25: on posera 5 à la seconde colonne, & l'on retiendra 2 unités pour la suivante. On dira après cela, 5 fois zero font zero, & 2 de retenu font 2: on posera 2 à la troisieme colonne, & l'on passera à la suivante, en disant, 5 fois zero ne font encore rien; & comme on ne retient rien, on posera zero à la quatrieme colonne. Passant à la quatrieme du multiplicande, on dira, 5 fois 3 font 15, on posera 5 à la cinquieme colonne du produit, & l'on avancera 1 à la sixieme.

	3005
	350
	150250
	9015.
Produit	1051750

On passera après au chiffre 3 des centaines du multiplicateur, & l'on dira, 3 fois 5 font 15: on posera 5 à la colonne des centaines, c'est-à-dire, dans celle du multiplicateur 3, & l'on retiendra 1: ensuite 3 fois zero ne font rien, mais 1 de retenu fait 1, qu'on posera à la quatrieme colonne; puis encore 3 fois zero ne font rien; & comme on ne retient rien, on posera zero à la cinquieme

colonne du produit; & enfin 3 fois 3 font 9; on poſera 9 à la ſixieme colonne du produit, & l'on aura pour le ſecond produit 901500, avec lequel on additionnera le premier, & l'on aura 1051750 pour le produit total.

Sur la Preuve de la Multiplication.

56. La preuve de la multiplication ſe fait par une autre opération qu'on appelle *Diviſion*, dont on parlera dans la ſuite : mais en attendant, voici un moyen fort ſimple de s'aſſurer de l'exactitude de l'opération.

Ce moyen conſiſte, après avoir fait la multiplication d'un nombre par un autre, d'en faire une nouvelle avec le même multiplicande, mais avec un multiplicateur double. Il eſt clair que cette ſeconde multiplication doit donner un produit double de la premiere, & qu'ainſi la moitié de ce produit doit être égale à celui de la premiere multiplication.

Soit, par exemple, 5303 à multiplier par 374. Ayant fini l'opération & trouvé 1983322 pour le produit, on poſera à part le multiplicateur 374, & on le multipliera par 2; ce qui donnera 748 pour celui de la ſeconde opération.

On multipliera donc le même multiplicande 5303 par 748, & l'on aura le produit 3966644, dont on prendra la moitié, en commençant par le premier chiffre de la gauche, disant : la moitié de 3 est 1 pour 2, il reste 1 unité, qui étant posée à côté sur le 9 voisin, vaut 10, & jointe avec ce 9, fait 19, dont la moitié est 9 pour 18, on posera 9 sous le 9. Il reste encore une unité,

```
          5303
           374
       -------
         21212
        37121.
       15909..
       -------
*Produit* 1983322

Pour la Preuve.

           374
             2
           ---
           748

          5303
           748
       -------
         42424
        21212.
       37121..
       -------
       3966644
       -------
*Preuve* 1983322
```

qui étant portée sur la colonne suivante, vaut aussi 10 unités de cette colonne, lesquelles jointes au 6 qui s'y trouve, font 16, dont la moitié est 8, qu'on posera sous le 6. On continuera ensuite à prendre la moitié des autres chiffres du même produit, en disant, la moitié

de 6 eſt 3, qu'on poſera ſous le 6; puis encore la moitié de 6 eſt 3 : enſuite la moitié de 4 eſt 2; puis la moitié de 4 eſt encore 2, & l'on aura ainſi pour la moitié du produit de la ſeconde multiplication 1983322, c'eſt-à-dire, le produit de la premiere multiplication; ce qui prouve que chacune de ces opérations eſt exacte.

REMARQUE.

57. Il eſt clair que cette preuve peut être variée de différentes manieres. On auroit pu doubler le multiplicande; & laiſſant le même multiplicateur, on auroit eu de même dans la ſeconde opération un produit double de celui de la premiere. En doublant le multiplicande ou le multiplicateur, & prenant la moitié de celui de ces deux termes qu'on n'aura pas doublé, il eſt évident auſſi qu'on auroit eu le même produit que celui de la premiere opération.

Après tout le détail dans lequel on eſt entré juſqu'ici ſur la pratique de la multiplication, il ſuffira de donner quelques exemples pour rendre cette pratique familiere, & pour faire voir l'obſervation de tout ce qui a été preſcrit pour cette opération.

Exemples de Multiplications simples.

I.

58. *La circonférence de la terre se mesure par celle d'un grand cercle qui est divisé en 360 parties égales, qu'on nomme* DEGRÉS. *Chaque degré est de 25 lieues: on demande combien la circonférence de la terre a de lieues.*

	360
	25
	1800
	720.
Réponse	9000 lieues.

Il est clair qu'il faut multiplier 360 par 25, & que le produit 9000, sera la quantité de lieues du tour de la terre.

II.

59. *L'année Julienne ou commune, est de 365 jours 6 heures, on demande combien elle a d'heures.*

Sçachant que le jour eſt de 24 heures, on multipliera 365 par 24, & on ajoutera 6 à la colonne des unités des produits; enſuite on en fera l'addition, qui donnera 8766 pour le nombre des heures de l'année.

	365
	24
	1460
	730.
	6
Réponſe	8766 h.

III.

60. *On ſuppoſe une armée compoſée de 50 bataillons de 650 ſoldats chacun, & de 84 eſcadrons de 140 cavaliers; on demande quel eſt le nombre d'hommes de cette armée.*

	50 *batail.*		84 *eſcad.*
	à 650 *hom.*		à 140 *caval.*
	2500		3360
	300..		84..
ſold.	32500	*cav.*	11760
caval.	11760		
Total	44260 *hom.*		

On multipliera les 50 bataillons par 650, & l'on aura 32500 pour le nombre d'hommes qu'ils contiennent.

On multipliera de même les 84 escadrons par 140, & l'on aura 11760 pour le nombre de cavaliers de l'armée : on additionnera après cela les soldats & les cavaliers, & leur somme 44260 donnera le nombre d'hommes de toute l'armée.

IV.

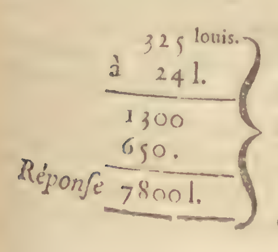
61. *On suppose qu'un Particulier a 25 l. à dépenser par jour, on demande à quoi se monte son revenu par an.*

365 jours.
à 25 l.
1825
730.
Réponse 9125 l.

Il y a 365 jours dans l'année ; il faut donc multiplier ce nombre de jours par 25, & le produit donnera le nombre demandé.

V.

62. *On demande combien 325 louis de 24 l. font de livres.*



Il faut multiplier 325 par 24, & le produit 7800 l. sera le nombre de livres que valent 325 louis à 24 l. chacun.

VI.

63. *On demande combien il y a de sols dans 725 l.*

	725 l.	
à	20 s.	
Réponse	14500 s.	

La livre vaut 20 sols. Il faut donc multiplier 725 par 20, & le produit 14500 sera le nombre de sols qui font 725 l.

VII.

64. *Sçavoir combien la livre de 20 sols contient de deniers.*

	20 s.
à	12 d.
	40
	20.
Réponse	240 d.

La livre vaut 20 sols, & le sol 12 deniers; il faut donc multiplier 20 par 12, & le produit 240 sera le nombre de deniers que contient la livre.

65. Il suit delà, que pour changer des livres en deniers, il faudra les multiplier par 240.

VIII.

66. *Le muid d'avoine contient 12 sep-*

tiers de 24 boiſſeaux ; ſçavoir le nombre de boiſſeaux que contient le muid.

12 Septiers.	
à 24 Boiſſeaux.	
48	
24	
288 Boiſſeaux.	

Il eſt clair qu'il faut multiplier 12 par 24, & que le produit 288, donnera le nombre des boiſſeaux du muid d'avoine.

Tous ces exemples ſont plus que ſuffiſans pour mettre en état de réſoudre toutes les queſtions qui concerneront la multiplication ſimple. On va paſſer à la compoſée, c'eſt-à-dire, à celle dans laquelle le multiplicateur eſt formé d'unités & de parties d'unités.

Multiplication composée.

67. Soit le nombre 275 à multiplier par 25 l. 15 ſ.

		275	
		25 l.	15 ſ.
		1375	
		550.	
Pour	10 ſ.	137 l.	10 ſ.
Pour	5 ſ.	68 l.	15 ſ.
		7081 l.	5 ſ.

On poſera le multiplicateur ſous le multiplicande, comme on le voit ici, & on fera d'abord la multiplication par les entiers du multiplicateur, c'eſt-à-dire, par 25.

On viendra enſuite à la multiplication des ſols. Pour la faire, on remarquera que ſi l'on avoit à multiplier le multiplicande par 1 livre, le produit ſeroit le même que le multiplicande, & que comme 15 ſols n'eſt que les trois quarts de 20 ſols ou d'une livre, le produit de 275 par 15 ſols, doit être les trois quarts de ce qu'il ſeroit par une livre.

Pour prendre les trois quarts de 275, on commencera par en prendre la moitié pour 10 ſols, & enſuite le quart pour 5 ſols, ou la moitié du produit de 10 ſols.

On dira donc (commençant toujours par la derniere colonne à gauche du multiplicande) la moitié de 2 eſt 1, qu'on poſera dans la colonne du 2 du multiplicande, c'eſt-à-dire, dans cet exemple, dans celle des centaines. Enſuite la moitié de 7 eſt 3, qu'on poſera auſſi dans la même colonne qu'occupe le chiffre 7 dont on prend la moitié ; il reſte 1 unité qui vaut 10 étant portée dans la colonne ſuivante, & qui par

conſéquent fait 15 avec le chiffre 5 de cette colonne : on en prendra la moitié qui eſt 7, pour 14 : on poſera 7 à la colonne des unités. Il en reſte 1 qui eſt 1 livre, dont il faut auſſi prendre la moitié, qui eſt 10 ſols, qu'il faut poſer vis-à-vis les ſols du multiplicateur, & dans le même rang que les livres du produit de 10 ſols ; le tout ainſi que l'exemple figuré le fait voir : ainſi on a dans cet exemple, pour le produit de 10 ſols, 137 livres 10 ſols.

Il reſte à prendre celui de 5 ſols : c'eſt évidemment le quart du multiplicande 275, ou la moitié de 137 liv. 10 ſols ; & comme la moitié eſt plus aiſée à prendre que le quart : on prendra donc pour 5 ſols la moitié de 137 liv. 10 ſols, & pour cela on dira, la moitié de 1 n'eſt point, & on poſera un point ou zero ſous le chiffre 1. On portera cette unité ſur la colonne ſuivante où elle vaudra 10 unités, qui jointes au 3 de cette colonne feront 13. On en prendra la moitié qui eſt 6, qu'on poſera ſur le 3 : il reſte encore une unité, qui étant portée ſur la colonne voiſine, vaudra 10, qui avec les 7 de cette colonne feront 17, dont la moitié 8 ſe poſera ſous le 7. Il reſte une unité, qui eſt ici 1 livre,

qui vaut 20 ſols : on les joindra avec les 10 ſols du précédent produit, & l'on aura 30 ſols, dont la moitié eſt 15 ſols, qu'on poſera ſous les 10 ſols du produit précédent de 10 ſols, & l'on aura ainſi 88 liv. 15 ſols pour le produit de 5 ſols, ou pour le quart du multiplicande 275.

On additionnera après cela tous les différens produits particuliers de cette opération, dont la ſomme donnera le produit total 7081 liv. 5 ſols.

Explication des différentes parties du multiplicande qu'il faut prendre relativement au nombre des ſols du multiplicateur.

68. Quelque nombre de ſols qu'il y ait au multiplicateur (on ſuppoſe ce nombre moindre que 20 ; car autrement on augmenteroit les livres du multiplicateur d'autant d'unités qu'il y auroit de fois 20 ſols dans les ſols du multiplicateur ; enſorte qu'il reſteroit au multiplicateur un nombre de ſols moindre que 20), on en trouvera les différens produits, obſervant de prendre ſur le multiplicande.

Pour 10 ſols, la moitié.

Pour 5 ſols, le quart ou la moitié du

produit de 10 ſols, lorſqu'il ſe trouvera dans l'opération.

Pour 4 ſols, la cinquieme partie.

Pour 2 ſols, la dixieme.

Pour 1 ſol, la vingtieme ou la moitié de la dixieme.

REMARQUE.

69. Les différens nombres ci-deſſus ſont appellés *parties aliquotes* de la livre, parce qu'ils y ſont contenus exactement ou ſans reſte, & qu'on appelle *partie aliquote* d'un nombre, un autre nombre qu'il contient ainſi pluſieurs fois exactement. Les autres nombres de ſols qu'on peut former au deſſous de 20 ſols, n'y ſeront pas contenus ſans reſte : on les appelle *parties aliquantes. La partie aliquante* d'un nombre eſt donc celle qui n'eſt pas contenue ſans reſte dans le nombre, comme 3, qui eſt aliquante de 5 & 7, &c. La méthode de prendre les parties aliquantes de la livre, ne conſiſte qu'à les partager en parties aliquotes, qu'on prend ſucceſſivement. Ainſi on prendra toujours ſur le multiplicande.

70. *Pour 3 ſols, le produit de 2 ſols ; & celui de 1 ſol.*

Pour 6 ſols ; le produit de quatre ſols & celui de 2 ſols, ou pour 5 & pour 1 ſol.

Pour 7 ſols ; on prendra pour 5 ſols & pour 2 ſols.

Pour 8 ſols ; pour 4 ſols & pour 4 ſols ; ou pour 5 ſols, pour 2 ſols, & pour 1 ſol.

Pour 9 ſols ; pour 5 ſols & pour 4 ſols.

Pour 11 ſols ; pour 10 ſols & pour 1 ſol.

Pour 12 ſols ; pour 10 ſols & pour 2 ſols.

Pour 13 ſols ; pour 10 ſols, pour 2 ſols, & pour 1 ſol.

Pour 14 ſols ; pour 10 ſols & pour 4 ſols.

Pour 15 ſols ; pour 10 ſols & pour 5 ſols.

Pour 16 ſols ; pour 10 ſols, pour 5 ſols, & pour 1 ſol.

Pour 17 ſols ; on prendra pour 10 ſols, pour 5 ſols & pour 2 ſols.

Pour 18 ſols ; pour 10 ſols, pour 5 ſols, pour 2 ſols & pour 1 ſol.

Enfin pour 19 ſols, on prendra pour 10 ſols, pour 5 & pour 4 ſols.

71. Pour prendre telle partie qu'on voudra d'un nombre, comme ſa troi-

ſieme ou ſa quatrieme partie, &c. il ne faut que trouver combien de fois ce nombre contient de fois 3 ou 4; car la troiſieme partie d'un nombre eſt un autre nombre, qui répété ou additionné 3 fois à lui-même, fait le premier. De même la quatrieme partie du nombre eſt un autre nombre, qui, ajouté 4 fois à lui-même, fait le premier nombre, & ainſi de toutes les autres parties.

Ainſi la troiſieme partie de 9 eſt 3, parce que 3 eſt contenu trois fois dans 9, & ſa quatrieme partie n'eſt que 2, parce que 9 ne contient 4 que 2 fois avec le reſte 1 : dans ce cas, ſi 9 étoit accompagné d'autres chiffres, on porteroit 1 ſur celui qui le précéderoit à droite : il y vaudroit 10 unités, qui jointes à celle du chiffre de cette colonne, feroit une quantité dont on prendroit la quatrieme partie, ou le nombre de fois 4 qu'elle contiendroit; & s'il y avoit encore un reſte, on le porteroit de la même maniere ſur la colonne voiſine, & ainſi ſucceſſivement juſqu'au chiffre des unités, & alors s'il y a encore un reſte, on le multipliera par le nombre des parties dans leſquelles l'unité eſt diviſée, c'eſt-à-dire, par 20, s'il s'agit de livres, & on continuera de prendre ſur ce produit la même partie

qui aura été prise sur les chiffres précédens. Tout cela se trouvera éclairci par les exemples suivans.

72. Pour avoir la dixieme partie du multiplicande ou le produit de 2 sols, on séparera par un point le chiffre de la colonne des unités des autres chiffres, on les avancera ensuite tous vers la droite d'une colonne; ensorte que celui des dixaines se trouvera aux unités; celui des centaines aux dixaines; celui des mille aux centaines, & ainsi de suite, & l'on doublera le chiffre des unités séparé des autres, c'est-à-dire, qu'on le multipliera par 2, le produit sera toujours des sols qu'on portera à la colonne des sols.

Cette abréviation est fondée sur ce qu'en avançant les chiffres d'une colonne vers la droite, ils valent alors chacun 10 fois moins. Or un nombre 10 fois plus petit qu'un autre en est la dixieme partie. *Donc on a la dixieme partie de tous les chiffres qui précedent celui des unités en les avançant ainsi d'une colonne vers la droite.* Il reste à prendre la dixieme partie du chiffre des unités; mais puisque la dixieme partie d'une livre est 2 sols, cette dixieme partie est donc deux fois autant de sols qu'il contient de livres. Donc il faut, pour

avoir la dixieme partie du chiffre des unités, le doubler, & mettre ſon produit à la colonne des ſols.

73. Lorſqu'on a la dixieme partie du multiplicande, il eſt aiſé d'en avoir la vingtieme ; car cette vingtieme étant la moitié de la dixieme, il faut, pour l'avoir, prendre la moitié de la dixieme.

Ainſi pour le produit d'un ſol, on prendra la moitié du produit de 2 ſols, ou, ce qui eſt la même choſe, on prendra la moitié des chiffres du multiplicande qu'on poſera en l'avançant d'une colonne vers la droite, & à l'égard du chiffre des unités, on le portera aux ſols ſans le doubler ; car il eſt clair que puiſque la vingtieme partie d'une livre eſt 1 ſol, la vingtieme partie d'un nombre de livres exprimées par un chiffre, eſt autant de ſols que ce nombre contient de livres. Tout ceci expliqué, paſſons aux exemples, pour le rendre plus lumineux par la pratique.

74. Soit 245 à multiplier par 15 l. 17 ſ.

On multipliera d'abord 245 par 15 ; enſuite, pour avoir le produit du multiplicande par les 17 ſ. du multiplicateur, on prendra pour 10 ſols la moitié du multiplicande, commençant toujours

par le chiffre de la gauche.

	245	
	15 l.	17 ſ.
	1225	
	245	
Pour 10 ſ.	122	10
Pour 5 ſ.	61	5
Pour 2 ſ.	24	10
Produit total	3883 l.	5 ſ.

Ainſi on dira, la moitié de 2 eſt 1, qu'on poſera dans la troiſieme colonne, parce que le 2 du multiplicande eſt dans cette colonne. On dira après, la moitié de 4 eſt 2, qu'on poſera dans la même colonne du 4; enſuite la moitié de 5 eſt 2 pour 4: on poſera 2 dans la colonne des unités: celle qui reſte eſt une livre qui vaut 20 ſols; on en prendra la moitié qui eſt 10 ſols, qu'on poſera dans la colonne des ſols du multiplicateur. On aura ainſi 122 l. 10 ſ. pour le produit de 10 ſols.

On prendra enſuite pour 5 ſols, la moitié du précédent produit de 10 ſols. On dira donc, la moitié de 1 n'eſt point; mais en portant cette unité ſur la colonne ſuivante, elle vaudra 12 avec le 2 de cette colonne, dont la moitié eſt 6.

qu'on posera sous le 2. On dira après, passant au chiffre 2 des unités, la moitié de 2 est 1, qu'on posera à la colonne des unités. Puis on prendra la moitié des 10 sols qui appartiennent au produit de 10 sols : c'est 5 sols qu'on posera à la colonne des sols, & l'on aura 61 l. 5 s. pour le produit de 5 sols de cette multiplication. Il reste encore à prendre pour 2 sols.

Pour cela, on séparera le chiffre 5 des unités du multiplicande, des autres chiffres du même multiplicande par un point mis entre les dixaines & les unités. On posera ensuite les autres chiffres du multiplicande sous le produit de 5 sols, observant de les avancer chacun d'une colonne vers la droite ; ensorte que le chiffre 2 des centaines du multiplicande soit mis dans la colonne des dixaines ; que le 4, qui est aux dixaines, soit dans la colonne des unités ; & à l'égard du chiffre 5 des unités, on le doublera en disant, 2 fois 5 font 10, qu'on posera à la colonne des sols.

On additionnera après cela tous les produits particuliers de cette opération : leur somme 3883 l. 5 s. sera le produit total par 15 l. 17 s.

75. Si l'on a de même à multiplier

3109 par 425 livres 6 sols;

On fera la multiplication à l'ordinaire pour les 425 liv. du multiplicateur; & lorsqu'on sera parvenu aux sols, on prendra pour 5 la quatrieme partie du multiplicande, & pour 1 sol sa vingtieme.

	310.9	
par	.425 l.	6 s.
	15545	
	6218.	
	12436..	
Pour 5 s.	...0777	5
Pour 1 s.	155	9
Produit total	1322257 l.	14 s.

Pour prendre le quart ou la quatrieme partie du multiplicande 3109, on prendra d'abord le quart du premier chiffre de la gauche; mais comme le quart de 3 n'est point, on posera zero dans la colonne du 3 du multiplicande, sous le produit des livres. Ces 3 unités de ce premier chiffre étant portées sur celui qui le suit immédiatement à droite, vaudront 30 unités, qui, avec le chiffre 1, feront 31, dont le quart est 7 pour 28. On posera donc 7 à la colonne du chiffre 1. Il reste 3 unités qui vaudront 30

ſur la colonne voiſine ; comme elle eſt remplie par un zero, il n'y a rien à leur ajouter. Ainſi on dira, le quart de 30 eſt encore 7 pour 28 ; on poſera 7 à la colonne des dixaines, & l'on aura 2 unités de reſte de cette colonne, qui vaudront 20 ſur la ſuivante, & qui, avec le chiffre 9 de cette colonne, feront 29, dont le quart eſt 7 pour 28. On poſera donc 7 à la colonne des unités, l'unité reſtante eſt une livre, dont le quart qui eſt 5 ſols, ſera poſé à la colonne des ſols. Ainſi on aura pour le produit de 5 ſols, ou, ce qui eſt la même choſe, pour le quart du multiplicande, 777 liv. 5 ſols.

Il reſte à préſent à prendre le produit d'un ſol, qui doit donner la moitié de celui que donneroit 2 ſols.

On ſéparera d'abord par un point le chiffre 9 des unités du multiplicande, des autres chiffres qu'il contient, & l'on prendra la moitié des autres qu'on poſera ſous le produit de 5 ſols, mais obſervant d'avancer chaque chiffre d'une colonne vers la droite.

On dira donc, la moitié du chiffre 3 du multiplicande eſt 1 pour 2 : on poſera 1 à la colonne des centaines, qui eſt plus avancée d'une colonne vers la droite

que le chiffre 3. L'unité qui reste de la moitié de 3, étant portée sur la colonne voisine, vaut 10, ce qui, joint avec le chiffre 1 de cette colonne, fait 11, dont la moitié est 5 pour 10. On posera 5 à la colonne des dixaines, & l'unité restante sera portée sur la voisine, où elle vaudra 10. Or, comme cette colonne est remplie par un zero, il n'y a rien à ajouter à ces 10 : on en prendra donc la moitié, qui est 5, qu'on posera à la colonne des unités. Il n'y a plus qu'à prendre la 20e partie du chiffre des unités 9, qui a d'abord été séparé des autres, & pour cela, il n'y a qu'à le poser à la colonne des sols, (*N.* 75.) Ainsi l'on aura pour le produit d'un sol 155 liv. 9 sols.

Il ne s'agit plus après cela que d'additionner tous ces différens produits pour avoir le produit total 1322257 livres 14 sols.

REMARQUE.

76. Ayant séparé le chiffre des unités des autres chiffres du multiplicande par un point, on suppose que tous les chiffres sont avancés d'une colonne à droite ; ensorte que celui des dixaines répond après cela à la colonne des unités. Or si ce

ce chiffre est impair, lorsqu'on en prend la moitié, il reste une unité, qui ainsi est une livre, dont la moitié, qui est 10 sols, doit être jointe & portée aux sols avec le chiffre des unités du multiplicande. C'est pourquoi, si dans l'exemple qu'on vient de voir, au lieu d'un zero aux dixaines du multiplicande, on avoit eu ou un 3, ou un autre chiffre impair, au lieu de la moitié de 10 que l'on a eu à poser à la colonne des unités, on auroit eu la moitié de 13, qui est 6: il auroit donc resté une livre, dont on auroit pris la moitié, qui est 10 sols, qu'on auroit jointe au chiffre 9 des unités, & l'on auroit eu 19 sols aux sols. Pour se rendre cette pratique bien évidente, il n'y a qu'à poser à part le produit de 2 sols, & en prendre la moitié. Cette moitié sera absolument le même produit que celui qu'on vient d'indiquer.

Multiplication par livres, sols & deniers, ou par les entiers, & toutes les parties dans lesquelles on les divise ordinairement.

77. Lorsque le multiplicateur a des livres, des sols & des deniers, on commence l'opération par les livres, après

quoi on vient aux ſols, & des ſols on paſſe à la multiplication des deniers.

78. Le produit des deniers ſe prendra ſur celui d'un ſol ou de deux ſols.

79. On prendra ſur le produit d'un ſol.

Pour 6 deniers ſa moitié.

Pour 4 d. le tiers.

Pour 2 d. la ſixieme partie.

Pour 1 d. la douzieme.

Pour 5 d. on prendra pour 4 le tiers, & pour 1 le quart du produit de 4.

Pour 7 d. on prendra pour 6 d. la moitié, & pour un la ſixieme partie du produit de 6 d.

Pour 8 d. on prendra pour 6 la moitié, & pour 2 le tiers du produit de 6.

Pour 9 d. on prendra pour 6 d. la moitié, & pour les 3 reſtans, la moitié du produit de 6.

Pour 10 d. on prendra pour 6 la moitié du produit d'un ſol, & pour 4 le tiers du même produit.

Pour 11 d. on prendra d'abord pour 6 d. puis pour 3, la moitié du produit de 6, & pour les 2 reſtans, le tiers du produit des 6 d.

80. Si l'on prend les deniers ſur le produit de 2 ſols. On prendra *pour 6 d. le quart du produit de 2 ſols.*

Pour 8 d. le tiers.

Pour 3 d. la huitieme partie.
Pour 4 d. la ſixieme partie.
Pour 2 d. la douzieme.
Pour 1 d. la vingt-quatrieme, &c.

REMARQUES.

I.

81. Comme les commençans ont ſouvent de la difficulté à prendre la douzieme & la vingt-quatrieme partie d'un nombre, ils pourront, lorſqu'ils auront à prendre un denier, ſuppoſer qu'ils ont 4 ou 6 deniers, & prendre enſuite le quart du produit de 4 deniers, ou la ſixieme partie de celui de 6, qui donneront également le produit d'un denier.

II.

82. Lorſque le multiplicateur ſe trouvera avoir des deniers, ſans avoir des ſols, ou que le nombre de ſes ſols n'obligera point de prendre le produit d'un ſol, ni celui de 2 ſols, on ſuppoſera l'un de ces produits ſur lequel on prendra les deniers, mais on le biffera par un trait de plume, pour ne point le comprendre dans l'addition des différens produits de la multiplication.

Exemples de multiplication par livres, sols & deniers.

83. Soit 1300 à multiplier par 25 liv. 11 s. 5 d.

Après avoir fait la multiplication par les livres & les sols, qui ont donné le produit d'un sol, on viendra aux deniers, que l'on prendra sur le produit d'un sol, qui, dans cet exemple, est de 65 liv.

	1300		
	25 l.	11 s.	5 d.
	6500		
	2600.		
Pour 10 s.	..650	0	
Pour 1 s.	...65	0	
Pour 4 d.	...21	13	4
Pour 1 d.	...05	8	4
Produit	33242 l.	1 s.	8 d.

On prendra d'abord pour 4 deniers le tiers de ce produit. Pour cet effet on dira, le tiers de 6 est 2, qu'on posera sous le 6 & dans la même colonne. Ensuite le tiers de 5 est 1 pour 3, & il restera 2. On posera 1 sous le 5, & l'on portera les 2 unités restantes aux sols. Elles vaudront 40 sols : on en prendra le tiers,

qui eſt 13 pour 39 : on poſera donc 13 aux ſols. Il reſte un ſol, qui vaut 12 deniers; le tiers en eſt 4, qu'on portera à la colonne des denièrs, & l'on aura ainſi 21 liv. 13 ſols 4 den. pour le produit de quatre deniers.

Il reſte à prendre le produit d'un denier, c'eſt-à-dire, le quart de celui de 4. On dira donc, le quart de 2 n'eſt point, & l'on poſera zero ſous le 2. Mais ce chiffre porté à la colonne des unités vaut deux dixaines ou vingt unités, qui jointes avec le chiffre 1 de cette colonne, font 21, dont le quart eſt 5, qu'on poſera à la colonne des unités. Il reſte une livre qu'on portera aux ſols : & qui jointes avec les 13 ſols du précédent produit, fait 33 ſols : on en prendra le quart, qui eſt 8 pour 32, & on poſera 8 aux ſols. Il reſte un ſol, qui vaut 12 deniers, qu'on joindra avec les 4 du précédent produit ; ce qui donnera 16 deniers, dont le quart eſt 4, qu'on poſera ſous le 4 du produit de 4 deniers : on additionnera enſuite tous ces différens produits, dont la ſomme ſera 33242 liv. 1 ſ. 8 d.

84. Pour multiplier 3045 par 303 liv. 10 ſ. 7 d., on commencera de même la multiplication par les liv. & par les ſols ; mais comme les ſols ne donnent point

	3045		
	303 l.	10 ſ.	7 d.
	9135		
	9135..		
Pour 10 ſ.	..1522	10	
Faux prod. d'un ſol.	...152	5	
Pour 6 d.	...076	2	6
Pour 1 d.	12	13 ſ.	9 d.
Produit	924246 l.	6 ſ.	3 d.

le produit d'un ſol ſur lequel on puiſſe prendre les deniers, on le ſuppoſera, c'eſt-à-dire qu'on fera un faux produit d'un ſol qui donnera 152 liv. 5 ſols, & ce ſera ſur ce produit que l'on prendra les deniers. Comme on a 7 deniers, on prendra d'abord pour 6 la moitié du produit d'un ſol. Pour cet effet on dira, la moitié d'un n'eſt point, & l'on mettra zero ſous cette unité. On la portera à la colonne ſuivante, où elle vaudra 15, avec le 5 de cette colonne. On dira, la moitié de 15 eſt 7, qu'on poſera ſous le 5. Il reſte une unité pour la colonne ſuivante, qui vaudra 12 avec le chiffre 2 de cette colonne; on en poſera la moitié, 6, ſous le 2 : on prendra auſſi

la moitié des 5 ſols du produit d'un ſol, qui eſt 2 ſols 6 deniers, on poſera ainſi 2 ſols aux ſols, & 6 deniers à la colonne des deniers, & l'on aura 76 liv. 2 ſ. 6 d. pour le produit des 6 deniers.

Pour le denier reſtant des 7 du multiplicateur, on prendra la ſixieme partie du produit des 6 premiers. On dira donc, la ſixieme partie de 7 eſt 1 pour 6; on poſera un ſous le 7, & il reſtera une unité qu'on portera à la colonne ſuivante; elle y vaudra 16, jointe au 6 de cette colonne: on en prendra la ſixieme partie, qui eſt 2 pour 12, on poſera 2 ſous le 6, & il reſtera quatre livres, qui valent 80 ſols, leſquels joints aux 2 ſols du précédent produit, font 82 ſols, dont la ſixieme partie eſt 13 pour 78, on poſera 13 aux ſols. Il en reſtera 4, qui valent 48 deniers, leſquels joints aux 6 du précédent produit, font 54, dont la ſixieme partie eſt 9, & on poſera 9 aux deniers. On aura ainſi 12 liv. 13 ſ. 9 d. pour le produit d'un denier. On paſſera après cela un trait de plume ſur le produit d'un ſol, & l'on additionnera enſemble tous les autres, qui donneront 924246 liv. 6 ſ. 3 d. pour le produit total de la multiplication propoſée.

De la multiplication, lorsque le multiplicateur a des toises, des pieds & des pouces.

85. On multipliera tel nombre que l'on voudra par des toises, des pieds, & des pouces, de la même maniere qu'on vient de le faire par livres, sols, & deniers, observant, comme la toise a 6 pieds, & le pied 12 pouces, de prendre pour 3 pieds la moitié du multiplicateur; pour 2, le tiers, &c. & à l'égard des pouces, de les prendre sur le produit d'un pied, comme on a pris les deniers sur le produit d'un sol. Un exemple suffira pour faire comprendre facilement tout ce que cette sorte de multiplication peut avoir de particulier. On croit pouvoir se dispenser d'entrer dans le détail de l'opération, après tout ce qui a été expliqué ci-devant sur ce sujet.



On veut multiplier 4567
par 27 toiſ. 5 pieds. 10 pouc.

	31969		
Pour 3 pieds, la moitié du multiplicande.	9134.		
Pour 2 pieds, le tiers du multiplicande.	2283	3	
Pour 8 pouces, le tiers du produit de 2 pieds.	1522	2	
Pour 2 pouces, le quart du produit de 8 pouces.	507	2	8
	126	5	2
Produit total	127749 toiſ.	0 pieds.	10 pouc.

Preuve de la Multiplication composée.

86. On a déja donné le moyen de s'aſſurer de l'exactitude de l'opération de la multiplication (n. 56.) en faiſant une autre multiplication dont le multiplicateur fût double de celui du premier, & qui, par conſéquent, doit auſſi donner un produit double : on emploiera cette même preuve à la multiplication composée. Elle peut généralement s'appliquer à toutes ſortes de multiplications.

Pour en rendre la pratique encore plus aiſée, on va en donner un exemple.

Soit le nombre	3025		
à multiplier par	300 l.	10 ſ.	11 d.
	907500		
Produit de 10 ſols.	1512	10	
Faux produit d'un ſol.	151	5	
Pour 6 deniers, la moitié du produit d'un ſol.	75	12	6
Pour 3 deniers, la moitié du produit de 6 ſols.	37	16	3
Pour 2, le tiers du produit de 6 deniers.	25	4	2
Total	909151 l.	02 ſ.	11 d.

Pour s'aſſurer de l'exactitude du produit 909151 liv. 2 ſ. 11 den. on fera une nouvelle multiplication avec le même multiplicande 3025, mais dont le multiplicateur ſera double du premier 300 liv. 10 ſ. 11 den. Pour cela, on poſera 2 fois ce même nombre, comme on le voit ci-à-côté, & l'on en fera l'addition : la ſomme 601 liv. 1 ſ. 10 den. ſera le multiplicateur de la ſeconde multiplication.

300 l.	10 ſ.	11 d.
300	10	11
601 l.	1 ſ.	10 d.

Multiplicateur double du précédent.	3025		
	601 l.	1 f.	10 d.
	3025		
	18150..		
Produit d'un fol.	151	5	
Pour 6 den. la moitié.	75	12	6
Pour 4, le tiers du produit d'un fol.	50	8	4
Total	1818302 l.	5 f.	10 d.
Moitié du produit total, qui donne celui de la multiplication précédente, & par conféquent la preuve de cette opération.	909151 l.	2 f.	11 d.

Application de la Multiplication compofée à des exemples.

I.

87. Un particulier s'eft engagé de fournir 1200 chevaux pour l'Artillerie, à raifon de 35 fols 6 den. par jour, pour chaque cheval; fes chevaux ont été employés pendant les mois d'avril, mai, juin, juillet, août, feptembre, & jufqu'au 15 octobre, combien lui eft-il dû?

Il eft évident qu'il faut fçavoir à quoi fe monte par jour la dépenfe ou la paie des 1200 chevaux, & qu'enfuite il la

faut multiplier par le nombre de jours que les chevaux ont été employés.

	1200 Chevaux.
à	1 l. 15 ſ. 6 d.
	1200
Pour 10 ſols	600
Pour 5 ſols	300
Faux produit d'un ſol .	060
Pour ſix deniers	30
Dép. par jour des ch. .	2130 l.

Ils ont été employés 6 mois & demi, qui contiennent, ſçavoir,

Avril	30 jours.
Mai	31
Juin	30
Juillet	31
Août	31
Septembre	30
Et pour Octobre	15
Total	198 jours.

Il ne s'agit plus à préſent que de multiplier ces 198 jours par la dépenſe d'un jour, c'eſt-à-dire, par 2130 liv. pour avoir la dépenſe demandée.

à	198 jours.
	2130 l.
	5940
	198..
	396...
Dépense totale	421740 l.

II.

88. *Lorsque le boisseau d'avoine se vend 7 sols 8 deniers, on demande à combien revient le muid, qui en contient 288.*

Il est clair qu'il ne faut que multiplier 288 boisseaux par 7 sols 8 deniers.

	288 Boisseaux.	
à	0 l.	7 s. 8 d.
Pour 5 s.	72	
Pour 2 s.	28	16
Pour 8 d.	09	12
Réponse	110 l.	8 s.

III.

89. *Un Officier a une ordonnance de 800 liv. à recevoir, sur laquelle on doit retenir le dixieme & les 4 deniers pour,*

livre ; sçavoir à quoi se montent ces deux retenues, & le produit net de l'ordonnance.

Il faut d'abord prendre le dixieme de 800 liv. pour cela, il ne faut que retrancher le premier zero de la droite, & il restera 80, qui sera la dixieme partie de 800, ou le produit de ce nombre par 2 sols. A l'égard des 4 deniers, comme ils sont la sixieme partie du produit de 2 sols, ils doivent produire la sixieme partie de 80, qui est 13 liv. 6 s. 8 den.

Ainsi l'on aura pour le dixieme de 800.	80 l.
Pour le produit des 4 deniers pour livre.	13 l. 6 s. 8 d.
Tot. des deux retenues	93 l. 6 s. 8 d.

Présentement si de 800 livres on en soustrait 93 liv. 6 s. 8 den. le reste 706 liv. 13 s. 4 den. sera le produit net de l'ordonnance de 800 liv.

Qui de	800 l.		
ôte	93 l.	6 s.	8 d.
reste	706 l.	13 s.	4 d.
Preuve	800 l.		

I V.

90. *Trouver la dépenſe totale ou le fonds néceſſaire pour l'entretien d'un régiment de cavalerie, de dragons ou d'infanterie pendant une année.*

Il faut pour cela ſçavoir le nombre des ſoldats dont chaque compagnie eſt compoſée, celui des différens officiers qui y ſont attachés, & la paie qui leur eſt accordée à chacun par le Roi ; ce qui étant connu, on peut trouver aiſément la dépenſe de toute la compagnie dans un jour, & celle de la compagnie dans un an, en multipliant la dépenſe d'un jour par 365 jours. Ayant ainſi la dépenſe d'une compagnie pendant une année, on aura celle de toutes les compagnies du régiment, en multipliant la dépenſe d'une compagnie par le nombre des autres ; ce qui n'a aucune difficulté.

91. Il eſt clair qu'on peut par-là avoir la dépenſe totale de toute une armée pendant une année, ou pendant tel nombre de jours que l'on veut ; car lorſqu'on connoîtra la dépenſe particuliere de tous les différens corps dont elle eſt compoſée, l'addition de ces dépenſes donnera celle de toute l'armée ; ce qui

paroît trop clair & trop facile pour mériter d'entrer là-dessus dans un plus grand détail.

V.

DE LA DIVISION.

92. DIVISER un nombre par un autre, c'est en chercher un troisieme qui y soit contenu autant de fois que l'unité est contenu dans le second.

Ainsi diviser 12 par 4, c'est chercher le nombre 3 qui est contenu 4 fois dans 12, c'est-à-dire, autant de fois que le second 4 contient l'unité.

Le nombre 3 étant contenu 4 fois dans 12, en est le quart; s'il y étoit contenu 5 fois, il en feroit la cinquieme partie, &c. D'où il suit que diviser un nombre par un autre, c'est aussi le partager en autant de parties égales que le second nombre contient d'unités.

93. Le nombre à diviser se nomme *Dividende*; celui par lequel on divise, *Diviseur*, & celui qui fait connoître combien de fois le dividende contient

le diviſeur, ſe nomme le *Quotient.*

Dans l'exemple de 12 à diviſer par 4, 12 eſt le dividende, 4 le diviſeur, & 3 le Quotient.

On ſuppoſe qu'on ſçait diviſer par cœur tout nombre moindre que 100 par tout nombre moindre que 10; & pour faire entendre plus clairement les regles de la diviſion, on les fera précéder d'un exemple d'où on pourra les déduire.

EXEMPLE *d'une diviſion dans laquelle le diviſeur n'a qu'un chiffre.*

94. Soit le nombre de 772 à diviſer par 4.

Dividende	772	*Quotient.*
Diviſeur	4	193
	37	
	4	
	12	
	4	
	0	

On tracera à côté de ce nombre, vers ſa droite, une petite ligne, comme on le voit ci-deſſus; on poſera à la droite de

cette ligne, les chiffres qu'on trouvera pour le quotient.

On écrira le diviſeur 4 ſous le premier chiffre 7 de la gauche du dividende, & l'on marquera un point ſur ce chiffre.

Ceci fait, on commencera l'opération de la diviſion, en diſant, en 7, combien de fois 4, on trouvera qu'il y eſt 1 fois. On poſera 1 au quotient; on multipliera le diviſeur 4 par ce chiffre, & l'on en retranchera le produit 4, du nombre 7, il reſtera 3, qu'on poſera dans la même colonne du chiffre 7 ſous le diviſeur 4.

On marquera enſuite un point ſur le ſecond chiffre du dividende, en comptant de gauche à droite, & on abaiſſera ce chiffre à côté du reſte 3. On avancera le diviſeur d'une colonne vers la droite, c'eſt-à-dire, qu'on le poſera ſous le chiffre 7 qu'on vient d'abaiſſer, & l'on dira, joignant le reſte 3 avec ce chiffre, en 37 combien de fois 4 : on trouvera 9 qu'on poſera au quotient, à côté du premier chiffre. On multipliera 9 par 4, en diſant : 9 multiplié par 4 fait 36, qui étant ôté de 37, il reſte 1, qu'on poſera ſous la ſeconde poſition du diviſeur 4.

On marquera un point ſur le troiſieme chiffre 2 du dividende, & on l'abaiſſera enſuite à côté du ſecond reſte 1. On repoſera le diviſeur 4, en l'avançant d'une colonne vers la droite; de maniere qu'il ſoit ſous le chiffre 2 qu'on vient d'abaiſſer, & l'on dira, joignant le reſte 1 avec le chiffre 2, en 12 combien de fois 4, il y eſt 3, qu'on poſera au quotient. On multipliera 3 par 4, ce qui donne 12, qui étant retranché du reſte 12 du dividende, il ne reſte rien.

Comme il n'y a plus de chiffres à abaiſſer dans le dividende, la diviſion eſt achevée, & le quotient 193 fait voir que dans 772 il y a 193 fois 4.

Preuve de la diviſion.

La preuve de la diviſion ſe fait en multipliant le quotient par le diviſeur, & lorſque le produit ſe trouve égal au dividende, l'opération eſt exacte.

Car puiſque le quotient exprime le nombre de fois que le dividende contient le diviſeur, ce nombre de fois multiplié par le diviſeur, doit donner le dividende.

Quotient	193
Diviſeur	4
Preuve	772

95. Si après la derniere opération d'une diviſion il y a un reſte, on l'ajoutera, pour la preuve, au produit du quotient par le diviſeur.

Par exemple, ſi on diviſe 4378 par 5, on trouvera le quotient 875, avec le reſte 3; & pour la preuve, on multipliera 875 par 5, & on ajoutera 3 au produit 4375, à la colonne des unités, avec lequel on l'additionnera.

```
4378  {875
5
---
37
5
---
 28
  5
---
reste  3
---
Preuve  875
          5
        ---
       4375
reste     3
       ----
Produit 4378 égal au dividende.
```

On donnera dans la ſuite la maniere d'exprimer au quotient le reſte d'une diviſion.

REMARQUES.

I.

96. Les points que l'on met ſur les chiffres du dividende, ſervent à faire connoître ceux qui ont déja été diviſés, & ce qui reſte à diviſer du dividende.

II.

97. Le diviſeur change de place à chaque opération, en avançant toujours d'une colonne vers la droite. Sa premiere poſition eſt ſous la premiere colonne du dividende, à moins que le chiffre du dividende qui occupe cette colonne, ne ſoit de moindre valeur que celui du diviſeur; car autrement on prend pour la premiere colonne du dividende le ſecond chiffre, en allant de gauche à droite, & alors le premier chiffre du diviſeur ſe place ſous cette colonne, ainſi qu'on a pu l'obſerver dans la précédente opération.

III.

98. Si dans une des opérations de la diviſion, il ne ſe trouve point de reſte,

ou si le reste joint au chiffre suivant abaissé, est de moindre valeur que le diviseur, on pose zero au quotient ; on abaisse ensuite un autre chiffre du dividende, & on pose le diviseur en l'avançant à l'ordinaire d'une colonne vers la droite.

Par exemple, si l'on a 609 à diviser par 3, on trouvera d'abord que 6 contient 2 fois 3. On posera donc 2 au quotient, & retranchant ensuite de 6 le produit de 2 par trois, qui est aussi 6, il ne restera rien. Abaissant après cela le second chiffre du dividende, qui est zero, on posera dessous le diviseur 3. Mais comme zero ne contient aucun nombre, on posera zero au quotient pour cette opération, & l'on abaissera le troisieme chiffre 9 du dividende, sous lequel on posera le diviseur, & l'on achevera la division comme dans l'exemple précédent.

Dividende	6	0	9	*Quotient.*
Diviseur	3			203
	0.	0		
		3		
Preuve.		0.	9	
			3	
			0	

203
3
———
609

IV.

99. Lorſqu'on diviſe un nombre par un autre, comme par exemple, 609 par 3, & qu'on dit d'abord en 6 combien de fois 3, il faut obſerver que le 6 dans la colonne où il ſe trouve placé, vaut 600, & qu'ainſi ſa diviſion par 3 donnant 2 au quotient, ce nombre doit être à la colonne des centaines, puiſque 600 contient trois 200 fois. Donc, en poſant 2 au quotient, on ſouſentend que ce nombre eſt précédé de deux zero vers la droite. Si on ne les poſe point d'abord au quotient, c'eſt qu'on veut voir ſi les autres colonnes du dividende ne contiendront pas le diviſeur. Si elles le contiennent, on poſe le chiffre qui en exprime la quantité, aux colonnes du quotient qui lui conviennent; ſinon on marque ces colonnes par des zero, comme on l'a vu dans l'exemple précédent.

V.

100. La démonſtration de la diviſion ſe tire de l'opération même; car il eſt clair qu'en trouvant combien toutes les parties du dividende contiennent le diviſeur, on ſçait combien de fois le dividende contient le diviſeur.

De la Division, lorsque le diviseur a plusieurs chiffres.

101. Pour diviser un nombre donné quelconque par un diviseur qui a plusieurs chiffres.

1°. On posera le diviseur sous le dividende de maniere que le premier chiffre à gauche du diviseur, soit sous le premier de la gauche du dividende, & tous les autres chiffres dont il est composé, ainsi successivement sous les chiffres du dividende, en allant de gauche à droite. Si le premier chiffre du diviseur est plus grand que le premier du dividende, on le posera sous le second chiffre suivant; alors la seconde colonne du dividende sera regardée comme la premiere, & elle comprendra la valeur des 2 premiers chiffres du dividende.

2°. On mettra un point sur chacun des chiffres du dividende qui répondent à ceux du diviseur, & l'on cherchera combien de fois le diviseur y sera contenu; le nombre qui l'exprimera, sera mis au quotient, & il en sera le premier chiffre.

3°. On multipliera le diviseur par le chiffre pour le quotient, & l'on en retranchera le produit des chiffres du dividende, sous lesquels on a posé le diviseur.

viſeur. On écrira le reſte, s'il y en a un, ſous ces chiffres, comme dans la ſouſtraction.

4°. On mettra enſuite un point ſur le chiffre du dividende, qui ſuit immédiatement ceux ſous leſquels le diviſeur a été poſé d'abord ; on abaiſſera ce chiffre dans ſa même colonne, à côté du reſte de la premiere ſouſtraction ; on poſera le diviſeur ſous ce reſte, en l'avançant d'une colonne vers la droite ; enſorte que le dernier chiffre du diviſeur à droite ſe trouve toujours ſous le dernier chiffre abaiſſé pour continuer l'opération. On cherchera enſuite, comme dans la premiere opération, combien le reſte de cette opération, jointe avec le chiffre abaiſſé, contient de fois le diviſeur. Ce nombre étant trouvé, on le poſera au quotient ; enſuite on retranchera ſon produit par le diviſeur, du reſte de la premiere ſouſtraction & du chiffre abaiſſé, & on poſera le reſte comme dans la premiere opération. On abaiſſera à côté de ce reſte, le chiffre ſuivant du dividende, l'on poſera deſſous le diviſeur, & l'on cherchera combien de fois il y ſera contenu ; le tout ainſi que dans la premiere opération, qu'on réitérera ſucceſſivement juſqu'à ce que l'on ait abaiſſé

tous les chiffres du dividende.

5°. Il doit toujours y avoir autant de chiffres au quotient, qu'il y a de différentes positions du diviseur dans l'opération ; c'est pourquoi lorsque le reste d'une opération, joint avec le chiffre abaissé, se trouve plus petit que le diviseur, on met zero au quotient, comme on l'a déja observé ci-devant, dans la division par un seul chiffre.

6°. Les chiffres du dividende, sous lesquels le diviseur se trouvera posé dans chaque opération, ne contiendront jamais le diviseur 10 fois, mais seulement 9 au plus : car les chiffres du dividende qui répondent au diviseur, sont en même nombre que ceux du diviseur, si le premier de la droite est plus grand que le premier du diviseur, autrement il y a un chiffre de plus dans les chiffres du dividende, que dans le diviseur. Or, si le diviseur a le même nombre de chiffres que la partie du dividende sous laquelle il est placé, & qu'on le multiplie par 10, son produit aura un chiffre de plus que cette partie du dividende, & par conséquent il ne pourra pas en être retranché. Si le diviseur a un chiffre de moins que la partie du dividende sous laquelle il est placé, son premier chiffre

eſt plus grand que le premier de cette partie du dividende ; en le multipliant par 10, il aura le même nombre, mais il fera alors un nombre plus grand que la partie du dividende ſous laquelle il eſt placé. Donc, dans aucun cas cette partie du dividende ne pourra contenir 10 fois le diviſeur.

7°. Pour chercher combien de fois les chiffres du dividende, correſpondant à ceux du diviſeur, contiendront le diviſeur, on ſe ſervira d'une eſpece de tâtonnement de cette maniere.

Pour ſçavoir par exemple, combien 684 contient de fois 237, j'obſerve que le premier chiffre 6 du dividende contient trois fois le premier 2 du diviſeur. Je ſuppoſerai en conſéquence que 684 contient 3 fois 237, & pour m'en aſſurer, je multiplierai à part 237 par 3. Le produit donnera 711, plus grand que 684, ce qui me fait voir que ce nombre ne contient pas 3 fois 237. J'aſſeye après cela s'il le contient 2 fois, & pour cet effet, je multiplie 237 par 2. J'ai le produit 474 plus petit que 684 ; ce qui me fait connoître que 684 ne contient le diviſeur 237 que 2 fois, avec un reſte, qui ſera plus petit que 237 : car s'il y étoit égal, 684 contien-

droit 3 fois 237, au lieu qu'on a vu qu'il ne le contient que 2.

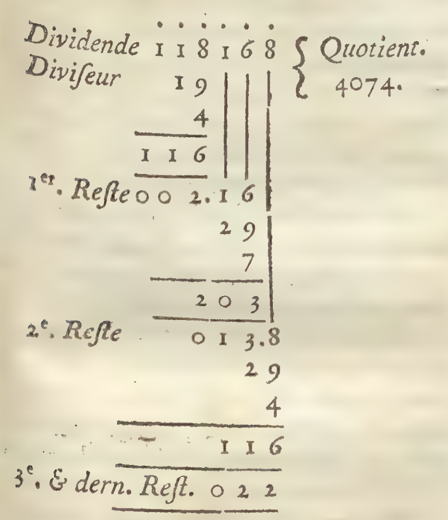
On déterminera de la même maniere le nombre de fois que chaque partie du dividende de toute divifion contiendra le divifeur qui fera placé fous cette partie, & on obfervera, comme on vient deja de le faire, que le refte de chaque opération doit être toujours moindre que le divifeur. S'il étoit égal ou plus grand, le chiffre pofé au quotient feroit trop petit.

Les regles qu'on vient d'expliquer, contiennent affez exactement toute la pratique de la divifion. Il ne s'agit plus que de les appliquer à des exemples, pour aider les commençans à fe les rendre plus familieres.

102. Soit le nombre 118168 à divifer par 29.

On pofera vers la gauche le divifeur 29, fçavoir fous le fecond & le troifieme chiffre du dividende, parce que le premier chiffre du divifeur eft plus grand que le premier du dividende. On mettra des points fur ces trois premiers chiffres, & on cherchera après, comme on l'a enfeigné ci-devant, combien 118 contient de fois 29, on trouvera 4 fois. On pofera 4 au quotient, & encore fous le

chiffre 9 du diviſeur, pour multiplier 29 par 4, ce qui donnera le produit 116, qu'on ſouſtraira de 118, & il reſtera deux.



On abaiſſera le quatrieme chiffre 1 du dividende à côté du reſte 2, & dans ſa même colonne, avec lequel reſte il fera 21; & comme ce nombre eſt plus petit que le diviſeur 29, on poſera zero au quotient, & l'on abaiſſera à côté de 21 le cinquieme chiffre 6 du dividende, qui fera, avec les 2 chiffres 1 & 2

qui le précedent, 216. On fera marcher le diviſeur de deux colonnes, c'eſt-à-dire, qu'on le poſera ſous les chiffres 1 & 6 de 216, & l'on cherchera enſuite en 216 combien il y a de fois 29. On trouvera 7, qu'on poſera au quotient, & encore ſous le chiffre 9 du diviſeur, pour ſervir de multiplicateur à ce diviſeur, lequel donnera ainſi le produit 203, qu'on retranchera de 216, & il reſtera 13 pour le ſecond reſte.

On abaiſſera à côté du reſte 13 le dernier chiffre 8 du dividende, qui fera, avec ce reſte, 138. On poſera 29 ſous 38, & l'on cherchera combien de fois 29 eſt contenu dans 138. On trouvera 4, qu'on poſera au quotient, & encore ſous le 9 du diviſeur par 4; ce qui donnera le produit 116, qu'on ſouſtraira de 138, & il reſtera 22 pour le troiſiéme & dernier reſte.

S'il y avoit un plus grand nombre de chiffres au dividende, l'opération ſe continueroit de la même maniere; elle ſe feroit auſſi également quand le diviſeur auroit un plus grand nombre de chiffres que dans cet exemple.

On fera la preuve de cette opération en multipliant le quotient 4074 par le diviſeur 29, & l'on ajoutera le dernier reſte 22 au produit.

```
                         4074
                           29
                        -----
                        36666
                         8148.
Dernier reste               22
                        ------
Preuve                  118168
```

103. Soit de même à diviser 947038 par 37.

```
            . . . . . .
            9 4 7 0 3 8    {2 5 5 9 5}
            3 7
              2
            ---
            7 4
            ---
1er. reste  2 0.7
              3 7
                5
            -----
            1 8 5
2e. reste   0 2 2.0
                3 7
                  5
            -------
              1 8 5
3e. reste     0 3 5.3                        2 5 5 9 5
                  3.7                              3 7
                    9                      -----------
            ---------                      1 7 9 1 6 5
                3 3 3                       7 6 7 8 5 .
            ---------   dernier reste              2 3
4e. reste         2 0.8                    -----------
                    3 7   Preuve           9 4 7 0 3 8
                      5
            -----------
                  1 8 5
            -----------
5e. & der. reste  0 2 3
```

On cherchera d'abord combien les deux premiers chiffres de la gauche du dividende, contiennent de fois 37. On trouvera 2 fois. On poſera 2 au quotient, & encore ſous le ſecond chiffre du diviſeur ; on multipliera 37 par 2, ce qui donnera le produit 74, qu'on ſouſtraira de 94, & l'on aura 20 pour le reſte de la premiere ſouſtraction.

On abaiſſera enſuite le troiſieme chiffre 7 du dividende à côté du premier reſte, avec lequel il fera 207, & l'on poſera le diviſeur ſous ce nombre, en l'avançant d'une colonne vers la droite, c'eſt à-dire, ſous le zero & ſous le 7: on cherchera enſuite combien 207 contiennent de fois 37 : on trouvera 5, qu'on poſera au quotient, & encore ſous le 7 du diviſeur, pour lui ſervir de multiplicateur : on aura après la multiplication, le produit 185, qu'on ſouſtraira de 207, & l'on aura le ſecond reſte 22.

On abaiſſera à côté du ſecond reſte 22 le quatrieme chiffre zero du dividende, qui fera valoir ce reſte 220 : on poſera le diviſeur 37 ſous les deux derniers chiffres de ce nombre, & l'on cherchera combien de fois il y ſera contenu. On trouvera 5, qu'on poſera au quotient & ſous le 7 du diviſeur. On multi-

pliera le diviſeur par 5, & l'on retranchera le produit 185 de 220 ; ce qui donnera le troiſieme reſte 35. L'on achevera enſuite l'opération, comme on l'a fait dans l'exemple précédent, & comme l'exemple figuré le fait voir. On aura, l'opération étant achevée, 25595 pour le quotient de 947038 diviſé par 37, c'eſt le nombre de fois que 37 eſt contenu dans ce nombre.

Autres exemples de diviſion.

Divid.	100000	{222}	
Diviſ.	450		
	2		
	900		
1er. *reſte*	100.0		
	450		222
	2		450
	900		11100
2e. *reſte*	100.0		888..
	450	*dernier reſte*	100
	2	*Preuve*	100000
	900		
3e. & *der. reſte*	100		

Divid.	5781010 { 20003 }		
Divis.	289		
	2		20003
	578		289
1er. *reste*	000.1.0.1.0		180027
	389		160024.
	3		40006..
	867	*dernier reste*	143
dern. reste	143	*Preuve*	5781010

Divid.	7200000 { 6000 }		
Divis.	1200		6000
	6		1200
	7200		1200000
1er *reste*			6000...
égal zero.	0000	*Preuve*	7200000

REMARQUE.

104. Dans ce dernier exemple, les quatre premiers chiffres du dividende contiennent exactement ou sans reste, le diviseur ; ensorte qu'après la premiere opération, il ne reste rien. Or, il doit y avoir autant de chiffres au quotient, qu'il y a ou qu'il peut y avoir de différentes positions au diviseur, ou, ce qui

est la même chose, qu'il y a de chiffres à abaisser. Mais, après la premiere opération de cet exemple, il reste 3 zero ou 3 chiffres à abaisser, & par conséquent 3 chiffres à mettre encore au quotient, lesquels chiffres ne peuvent être que des zero, puisqu'il ne reste rien ni dans la premiere opération, ni dans les caracteres qui restent à abaisser.

105. Il suit de cette observation, que lorsqu'en disant un nombre par un autre, il se trouve une opération dans laquelle il n'y a point de reste, alors s'il n'y a plus que des zero dans le dividende, il faut, pour achever la division, mettre autant de zero au quotient qu'il en reste à abaisser. C'est ce qu'on a pratiqué dans l'exemple qui donne lieu à cette remarque.



Diviser	1700000 {338}		
par	5017		
	3		
	15051		
1er. *reste*	01949.0		338
	5017		5017
	3		2366
	15051		338.
			1690...
2e. *reste*	4439.0	*dernier reste*	4254
	5017	*Preuve*	1700000
	8		
	40136		
3e. & *der. reste*	04254		

MÉTHODE PLUS ABREGÉE
DE LA DIVISION.

106. LORSQUE les regles de la division seront devenues un peu familieres par l'usage, on pourra en abréger l'opération, en faisant en même temps la multiplication de chaque chiffre des quotients par le diviseur & la soustraction de ce produit du dividende. Un exemple suffira pour faire connoître cette

méthode. On ne l'a pas donnée d'abord, parce qu'elle n'eſt que l'abrégé de celle qu'on a expliquée, & qu'il a paru que les principes de la diviſion ſeroient plus facilement entendus, la regle étant expliquée dans tout le détail qu'elle exige, que ſi on l'avoit donnée ſeulement par abrégé.

Les diviſions que l'on fera dans la ſuite de cet ouvrage, ſeront faites ſelon cette méthode. Elle n'aura abſolument rien de difficile, ſi l'on a bien conçu tout ce que l'on a expliqué juſqu'ici ſur la diviſion.

Soit le nombre 57060 à diviſer par 25.

	57060	{2282}
	25	
1er. *reſte*	07.0	
	25	
2e. *reſte*	20.6	
	25	
3e. *reſte*	06.0	
	25	
4e. & der. *reſte*	10	

	2282
	25
	11410
	4564.
reſte	10
Preuve	57060

On poſera à l'ordinaire le diviſeur 25 ſous les 2 premiers chiffres de la gauche

du dividende, & l'on cherchera combien de fois il y sera contenu. Ayant trouvé 2 fois, on mettra 2 au quotient; mais au lieu de mettre encore ce chiffre sous le premier de la droite du diviseur, pour multiplier ce diviseur, on dira : 2 fois 5 font 10, qui ne pouvant être ôté de 7, qui est au dessus du 5, on prendra une unité sur le chiffre du dividende qui précede le 7 à gauche, laquelle posée sur ce 7, vaudra 10 de ses unités, qui jointes avec les siennes, font 17, & alors qui de 17 ôte 10, il reste 7, qu'on posera sous le 5 du diviseur. Le premier chiffre 5 du dividende ne vaut plus alors que 4 unités; mais on peut le regarder comme valant 5, pourvu qu'on augmente d'une unité le produit du chiffre 2 du quotient par le premier chiffre du diviseur; car augmentant ces deux nombres également, leur différence sera toujours la même. En effet, le produit du 2 du quotient, par le 2 du diviseur, est 4, qui ôté du 5 du dividende, diminué d'une unité, il ne reste rien, ou bien ce produit étant augmenté de l'unité qu'on a prise sur le 5 du dividende, fait 5, lequel étant retranché de ce chiffre, considéré aussi comme valant 5, donne également zero. Donc,

on pourra toujours dans la ſuite emprunter ſur les chiffres du dividende qui précéderont celui ſous lequel ſera placé le chiffre du diviſeur qu'on multipliera, tel nombre d'unités qu'on aura beſoin, & conſidérer ces chiffres comme conſervant toujours leur même valeur, pourvu qu'on obſerve d'ajouter aux produits des chiffres du diviſeur, auxquels ils correſpondront, le même nombre d'unités qu'on aura emprunté ſur ces chiffres. Ceci expliqué, il faut continuer l'opération deja commencée.

Ayant trouvé le premier reſte 7, on abaiſſera à côté le troiſieme chiffre zero du dividende, qui avec le reſte 7 fera 70, ſous lequel nombre on poſera le diviſeur 25 : on cherchera enſuite en 70 combien il y a de fois 25 : on trouvera 2 qu'on poſera au quotient. On multipliera par ce nombre le diviſeur 25, en diſant : 2 fois 5 font 10, qui ne peuvent être ôtés du zero du dividende, qui eſt au deſſus de 5, mais prenant une unité ſur le 7 qui le précede, elle vaudra 10 ſur ce zero, & alors on dira, qui de 10 ôte 10, il reſte zero, qu'on poſera ſous le 5 du diviſeur, & l'on retiendra 1, c'eſt-à-dire, l'unité empruntée. On dira enſuite : 2 fois 2 font 4, & 1 de retenu font

5, qui ôté de 7, il reste 2, qu'on posera dans la colonne du chiffre 7 du dividende, & l'on aura le second reste 20.

On abaissera à côté du second reste 20, le chiffre 6 du dividende, avec lequel il vaudra 206. On posera le diviseur 25 sous les deux derniers chiffres de ce nombre, & l'on cherchera combien de fois il y sera contenu. On trouvera 8, qu'on posera au quotient : on multipliera 25 par 8, en disant : 8 fois 5 font 40, qui ne peuvent être retranchés du chiffre 6 dividende ; c'est pourquoi on empruntera une unité sur le chiffre 2 du dividende, laquelle posée à côté en vaudra 10 : on prendra 4 de ces 10 unités, qui en vaudront 40 à la colonne du 6, lesquelles jointes avec ce 6, feront 46, & alors on dira, qui de 46 ôte 40, il reste 6, que l'on posera sous le 5 du diviseur, & l'on retiendra les 4 unités empruntées. On dira après cela, 8 fois 2 font 16, & 4 de retenus font 20, qui étant ôté de 20, c'est-à-dire des deux chiffres qui répondent au 2 du diviseur, il restera zero, & l'on aura 6 pour le troisieme reste de l'opération.

On abaissera à côté de ce reste le dernier chiffre zero du dividende avec lequel il vaudra 60, on posera 25 sous

0, & on cherchera combien de fois il y sera contenu. Ayant trouvé 2, on le posera au quotient, & on multipliera le diviseur par ce même nombre, en disant : deux fois 5 font 10, qu'on ne peut ôter du zero qui est au-dessus du 5, c'est pourquoi on prendra une unité sur le chiffre 6 qui est à côté, laquelle en vaudra 10 à la colonne du zero, & on dira alors, qui de 10 ôte 10, il reste zero, qu'on posera sous le 5 à la derniere colonne du dividende, & l'on retiendra 1, c'est-à-dire, l'unité empruntée. On dira ensuite, 2 fois 2 font 4, & un de retenu font 5, qui ôté de 6, il reste 1, qu'on posera sous le 2 diviseur, & l'on aura 10 pour le quatrieme & dernier reste de cette division, dont le quotient est 2282.

REMARQUE.

107. On peut encore abréger cette opération en se dispensant d'écrire le diviseur sous toutes les parties du dividende. Pour cet effet, il faut tirer une ligne droite au-dessus du quotient, & écrire le diviseur sous cette ligne. Il faut après cela, à chaque opération qu'on fait sur le dividende, imaginer le diviseur posé comme dans le précédent exemple, & retrancher son produit par le chiffre du

quotient des chiffres du dividende ſous leſquels on le ſuppoſe placé, le tout ainſi qu'on le voit dans l'exemple ci-deſſous, qui eſt le même que le précédent.

Divid.	57060	*Diviſeur.*
1er. *reſte*	070	25
2e. *reſte*	206	*Quotient.*
3e. *reſte*	060	2282
4e. & *dern. reſte*	10	

Maniere d'exprimer au quotient le reſte d'une diviſion.

108. Soit 37897 liv. qu'il faut partager également à 359 perſonnes, ou, ce qui eſt la même choſe, qu'il faut diviſer par 359.

Faiſant cette diviſion, comme on l'a enſeigné dans les exemples précédens, on trouvera le quotient 105 liv. avec le reſte 202, qui ne peut être diviſé par 359.



Dividende	37897	{ 105 l.
Diviseur	359	
Premier reste	019.97	
	359	
Dernier reste	202 l.	
qu'il faut multiplier par	20 ſ.	
	4040	{ 11 ſ.
	359	
	450	
	359	
Reste des sols	91 ſ.	
qu'il faut multiplier par	12	*deniers.*
	182	
	91.	
	1092 d.	{ 3 d.
	359	
Reste des deniers	15 d.	

Quotient	105 l.	11 ſ.	3 d.
Diviseur	359		
	945		
	525.		
	315..		
	179	10	
	17	19	
reste	4	9	9
	0	1	3
Preuve	37897	00	0

Comme il s'agit de livres dans cet exemple, le reste 202 exprime des livres ; il faut le changer en sols ; & pour cet effet il faut le multiplier par 20 ; alors on aura 4040 sols, qu'on divisera par le même diviseur 359. On aura 11 sols au quotient avec 91 sols de reste.

On multipliera le reste 91 par 12, pour changer les sols en deniers, & l'on aura 1092 deniers qu'on divisera par le même diviseur 359. Ou aura 3 deniers au quotient, & le reste 15 deniers, qui ne peuvent plus être divisés par le diviseur 359. Ainsi le quotient total de la division proposée sera 105 liv. 11 sols 3 deniers.

Pour faire la preuve de cette opération, on multipliera à l'ordinaire le quotient par le diviseur, c'est-à-dire, 105 liv. 11 sols 3 den. par 359, observant, si l'on met le quotient à la place du multiplicande, de prendre le produit des sols sur 359, qui est le multiplicateur.

109. On remarquera à cette occasion, que toutes les fois que les sols & les deniers appartiendront au multiplicande, *il faudra les prendre sur le multiplicateur*, & qu'ils ne doivent être pris sur le multiplicande que lorsqu'ils appartiennent au multiplicateur.

A l'égard des 15 deniers reſtans de la derniere diviſion, on les rapportera à la multiplication auparavant que de faire l'addition de différens produits dont elle eſt composée ; & comme 15 deniers font 1 ſol & 3 deniers, on mettra 1 ſol à la colonne des ſols, & 3 deniers à celle des deniers.

S'il étoit reſté un plus grand nombre de deniers, on les auroit diviſés d'abord par 12, pour ſçavoir le nombre de ſols qu'ils auroient contenu, & le reſte de la diviſion auroit été les deniers qu'il auroit fallu ajouter à la colonne des deniers.

Si les ſols produits par les deniers étoient en plus grande quantité que 20, on les diviſeroit par ce nombre 20, pour les changer en livres ; le reſte de la diviſion ſeroit les ſols à ajouter à la colonne des ſols de la multiplication, & le quotient des ſols par le diviſeur 20, donneroit des livres qu'il faudroit ajouter au produit des livres aux colonnes convenables, c'eſt-à-dire les unités à la colonne des unités, les dixaines à celle des dixaines, &c.

Si le nombre à diviſer 37897 avoit repréſenté des toiſes, il auroit fallu changer en pieds le reſte 202 de la diviſion,

& pour cela, le multiplier par 6, puisque la toiſe a 6 pieds. Ayant diviſé les pieds par le diviſeur 359, on auroit multiplié le reſte des pieds par 12, pour en faire des pouces, parce qu'un pied vaut 12 pouces, & après avoir diviſé les pouces par le même diviſeur 359, on auroit multiplié le reſte par 12 pour en faire des lignes, & après la diviſion des lignes, on auroit négligé le reſte de la diviſion ; mais dans la preuve il auroit fallu rapporter à la multiplication du quotient par le diviſeur, ce que les lignes de reſte auroient produit de toiſes, de pieds, de pouces, ou de lignes, de la même maniere que dans la preuve de cette diviſion en livres, on a rapporté à la preuve 1 ſol 3 deniers pour les 15 deniers du reſte de la diviſion des deniers.

Si ce nombre à diviſer avoit repréſenté des années, il auroit fallu multiplier par 12 le reſte de la premiere diviſion, pour en faire des mois, & le reſte de la diviſion des mois par 30, pour en faire des jours, & ainſi de toutes les autres eſpeces qu'on pourra avoir à diviſer, qu'on réduira de même dans les différentes parties dans leſquelles elles ſe ſubdiviſent ordinairement.

Preuve de la Multiplication par la Division.

110. On a dit dans l'article de la multiplication, que sa véritable preuve étoit la division, & on n'a pu la donner alors, parce qu'on n'avoit point encore parlé de cette regle : présentement qu'elle doit être parfaitement connue, c'est ici le lieu de donner cette preuve.

On supposera pour cela qu'il faut multiplier, par exemple, 497 par 37 liv. 19 s. 11 d. dont le produit est 18883 liv. 18 s. 7 d.

	497		
	37 l.	19 s.	11 d.
	3479		
	1491.		
Pour 10 s.	248	10	
Pour 5 s.	124	5	
Pour 2 s.	49	14	
Pour 2 s.	49	14	
Pour 8 d.	16	11	4
Pour 2 d.	4	2	10
Pour 1 d.	2	1	5
Produit total	18883	18 s.	7 d.

Il est évident que ce produit doit contenir le multiplicateur 37 liv. 19 s. 11 den. autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicande 497, c'est-à-dire 497. Ainsi, comme en le divisant par ce nombre, on en prend la 497e partie, on doit donc trouver pour le quotient le multiplicateur 37 l. 19 s. 11 den. qui est exactement la 497e partie du produit, si la regle a été faite sans erreur.

Pour faire cette division, on commencera par diviser les livres du produit de la précédente multiplication, par le multiplicateur 497. On trouvera pour le quotient 37 liv. avec le reste 494, qu'on multipliera par 20 pour le changer en sols; on y ajoutera les 18 sols du produit, & l'on aura 9898 s. à diviser par le même diviseur 497; on trouvera pour le quotient 19 s. & 455 sols de reste, qu'on changera en den. en les multipliant par 12. On ajoutera à leurs produits les 7 d. du produit 18883 l. 18 s. 7 d. & l'on aura 5467 d. qu'il faudra aussi diviser par 497. Faisant cette division, l'on aura le quotient 11 sans reste; ce qui prouve que le produit 18883 l. 18 7 d. contient 497 fois le multiplicateur 37 l. 19 11 den. & par conséquent que l'opération de la multiplication est exacte.

18883

18835 l. { 37 l.
497
3973
497
Reste des livres 494
qu'il faut multiplier par 20 s.
9880
Sols du produit 18
9898 s. { 19 s.
497
4928
497
Reste des sols 455
qu'il faut multiplier par 12 d.
910
455
Deniers du produit 7
5467 d. { 11 d.
497
0497
497
000

F

111. On voit par-là que la multiplication & la division se servent réciproquement de preuve, de même que l'addition & la soustraction s'en servent également.

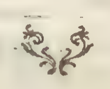
On fera de la même maniere la preuve de toutes les autres multiplications qu'on pourra proposer.

Application de la Division à la résolution de plusieurs questions.

I.

112. *On suppose qu'un degré du méridien terrestre est de 57183 toises, & qu'il vaut 25 lieues communes de France, sçavoir le nombre des toises de la lieue commune.*

Il faut diviser 57183 toises par 25, & le quotient 2284 sera le nombre des toises de la lieue commune.



```
57183 { 2287 toises
25|        25
---      -----
071      { 11435
 25|       4574.
---        reste 8
 218       -----
  25       57183   Preuve.
---
 183
  25
reste ---
  08
```

I I.

113. *Connoissant la circonférence de la terre de 9000 lieues, sçavoir le nombre des jours qu'il faudroit employer pour en faire le tour, supposant qu'on fasse 12 lieues par jour.*

Il est clair qu'il faut diviser 9000 lieues par 12, & que le quotient 750, sera le nombre des jours demandé.

```
9000 { 760 jours
12|
---
060
 12
---
 000
```

Divisant ces jours par 365, on trouvera qu'ils contiennent deux années & 20 jours de reste.

	750	{ 2 années
	365	
reste	20 jours	

III.

114. *Lorsque le muid d'avoine coûte 150 livres, à combien revient le boisseau.*

Il faut sçavoir quel est le nombre des boisseaux qu'il y a dans le muid.

Le muid est composé de 12 setiers, & le setier de 24 boisseaux. Il y a donc 12 fois 24 boisseaux dans le muid, c'est-à-dire, 288.

A présent il faut considérer que chaque boisseau coûte la 288e partie de 150 liv. Pour avoir cette partie, il faut diviser 150 par 288 ; ce qui ne se peut, attendu que le dividende 150 est plus petit que le diviseur 288 ; ce qui prouve d'abord que le boisseau vaut moins d'une livre ou de 20 sols. Pour trouver son prix, il faut multiplier les 150 liv. de la valeur du muid par 20, pour les réduire en sols, qui peuvent être divisés par 288,

& qui donneront pour le prix du boisseau 10 sols 5 deniers.

150 l.
par 20

3000 l. { 10 s.
288
Restes des sols 120
12

240
120.

1440 d. { 5 d.
288

000

Preuve.

288 Boisseaux

	à	10 5 d.
Pour 10 s.	144	
Faux prod. d'un sol.	14	8
Pour 4 d.	4	16
Pour 1 d.	1	4
Produit	150	00

La preuve de cette division se fera

en multipliant 288 boiſſeaux par 10 ſ. 5 d. & le produit de la multiplication donnant 150 liv. fait voir que l'opération de la diviſion eſt exacte.

IV.

115. *Un colonel fait donner 25 louis d'or de 24 livres aux ſoldats de ſon régiment, qu'on ſuppoſe être au nombre de 750, ſçavoir ce qui revient à chaque ſoldat.*

	25 louis	
à	24 l.	
	100	
	50.	
	600 l.	
	20 ſ.	
	12000 ſ.	{ 16
	750	
	4500	
	750	
	000	

Il faut d'abord ſçavoir combien 25 louis valent de livres. Pour cela on les multipliera par 24, & on trouvera 600 livres pour le produit. Ce nombre de livres étant plus petit que celui des ſoldats, on le réduira en ſols, en le multipliant par 20; & l'on aura 12000 ſols, qui diviſés par 750, donneront 16 ſols au quotient; c'eſt ce qui revient à chaque ſoldat.

On en fera la preuve en multipliant

750 par 16 sols, comme on le voit ci-dessous.

		750 soldats	
à		o	16f.
Pour	*10 f.*	375	
Pour	*5 f.*	187	10
Pour	*1 f.*	37	10
		600 l.	00

V.

116. *On suppose qu'on a jetté pour 18000 livres de bombes dans une place assiegée, & que chacune revenoit à 8 livres 15 sols, sçavoir le nombre de ces bombes.*

Il est évident que la solution de cette question ne consiste qu'à sçavoir combien il y a de fois 8 livres 15 sols dans 18000 liv.

Pour cela il faut réduire les 18000 liv. en sols, de même que les 8 liv. 15 sols que coûte chaque bombe, & diviser ensuite les sols des 18000 liv. par ceux du prix de la bombe, le quotient donnera le nombre de ces bombes, qui sera de 2057.

18000 l.		8
20		20
360000		160
17511	{ 2057 }	15
1000		175
175		
1250		
175		
reste 025 ſ.		

Preuve.

	2057 Bombes	
à	8	15 ſ.
	16456	
	1028	10
	514	5
reste	1	5
	18000 l.	00

VI.

117. *On ſçait que le Roi fait payer 500 livres par mois de 45 jours, (* ce qu'on appelle mois de campagne *) à un Brigadier de ſes armées, on demande à quoi ſe montent ſes appointemens pour chaque jour.*

Il ne faut que diviser 500 liv. par 45, & le quotient 11 liv. 2 sols 2 den. sera la paye demandée.

```
 500 { 11 l.
 45
 ---
 050
  45
 ---
  05
  20
 ---
 100 { 2 s.
  45
 ---
  10
  12
 ---
  20
 10
 ---
 120 { 2 d.
  45
 ---
reste 30 d.
 ---
```

Preuve.

	45 jours		
	11 l.	2 s.	2 d.
	45		
	45.		
Pour 2 s.	4	10	
Faux prod. de 6 d. pour prendre dessus les 2 d.	1	2	6
Pour 2.	0	7	6
reste	0	2	6
	500 l.	00 s.	0 d.

VI.

DE LA REGLE DE TROIS.

AUTREMENT APPELLÉE

REGLE DE PROPORTION.

118. LA *Regle de Trois* eſt une opération dont on ſe ſert pour trouver un quatrieme terme à trois nombres ou trois termes donnés ; enſorte que le premier terme ſoit grand ou petit par rapport au ſecond, de même que le troiſieme eſt grand ou petit par rapport au quatrieme.

C'eſt-à-dire, par exemple, que ſi le premier eſt double du ſecond, le troiſieme doit également être double du quatrieme ; que ſi le premier eſt le tiers du ſecond, le troiſieme eſt auſſi le tiers du quatrieme.

D'où il ſuit que lorſque le premier terme eſt plus grand que le ſecond, le troiſieme eſt plus grand que le quatrieme : & que lorſque le premier eſt plus petit que le ſecond, le troiſieme eſt auſſi plus petit que le quatrieme.

Cette regle se nomme *Regle de trois*, parce qu'elle est ordinairement composée de trois termes. On l'appelle aussi *Regle de proportion*, parce que le quatrieme terme étant trouvé, les quatre termes de la regle font ensemble ce que les Geometres appellent *proportion*, qui n'est autre chose que quatre nombres arrangés, de maniere que le premier contient ou est contenu dans le second de la même maniere que le troisieme contient ou est contenu dans le quatrieme.

Ainsi ces quatre termes, 3, 9, 12 & 36 font une proportion. Car 3 est le tiers de 9, de même que 12 est le tiers de 36.

Une proportion se marque ainsi, 3.9::12.36 qui s'exprime en disant, que *3 est à 9 comme 12 est à 36.*

119. Une propriété particuliere de quatre nombres ainsi arrangés en proportion, c'est que *le produit du premier terme par le quatrieme est égal à celui du second par le troisieme.*

Dans la proportion 3.9::12.36, le produit de 3 par 36 est 108, de même que celui de 9 par 12. D'où il suit que pour trouver le 4e. terme d'une proportion ou d'une regle de trois, *il faut multiplier ensemble le second & le troisieme, & diviser le produit par le premier.*

Car puiſque 9 multiplié par 12 donne le même produit que celui que donneroit la multiplication du premier terme par le dernier, il eſt évident qu'en diviſant ce produit par le premier terme 3, on a un nombre 36 au quotient, qui multiplié par ce même nombre 3, fait auſſi 108 ; ce qui prouve que ce nombre 36 eſt le quatrieme terme de la regle de trois.

Dans les exemples qu'on va donner, on démontrera l'opération de la regle de trois, indépendamment de la propriété de la proportion.

I.

120. *Si trois ouvriers font 15 toiſes d'ouvrage pendant un certain temps, combien 9 ouvriers en feront-ils dans le même temps.*

On prend toujours pour les deux premiers termes de la regle ceux qui ſont de même eſpece, comme dans cet exemple les nombres 3 & 9 qui expriment des ouvriers. Le troiſieme terme eſt celui qui eſt ſeul de ſon eſpece dans les trois termes donnés, & auquel on cherche un quatrieme terme de même eſpece.

On arrange ainſi les trois termes donnés 3 . 9 :: 15.

On marque ordinairement le quatrieme terme qu'on cherche d'une maniere indéterminée par une lettre quelconque, comme x. En ce cas, la regle de trois forme ainſi une proportion, 3 . 9 :: 15 . x, dont le quatrieme terme eſt x, mais qui ne ſera connu qu'après l'opération.

Pour le trouver, on doit, ſuivant ce qui a été dit précédemment, *multiplier le ſecond 9 par le troiſieme 15, & diviſer le produit 135 par le premier 3*; ce qui donnera 45 pour la valeur de x. c'eſt-à-dire, pour le nombre des toiſes que 9 ouvriers feront dans le même tems que trois ouvriers en feront 15.

DÉMONSTRATION.

121. Pour démontrer cette opération par elle-même, il faut conſidérer que dans la queſtion propoſée, ſi on ſçavoit le nombre des toiſes que font chacun des 3 premiers ouvriers, il ſeroit aiſé de trouver ce que 9 ouvriers en feroient dans le même temps, & cela en multipliant les toiſes de chaque ouvrier, par le nombre des ouvriers. Or, puiſque l'on ſuppoſe que 3 ouvriers font 15 toiſes d'ouvrage pendant le temps fixé,

pour avoir ce que chaque ouvrier en fait dans le même temps, il faut diviser 15 par 3, & le quotient 5 est le nombre des toises de chaque ouvrier. Présentement sçachant que chaque ouvrier fait 5 toises, pour avoir ce que 9 ouvriers en feront, il faut multiplier 5 par 9, ou 9 par 5 ; ce qui donnera 45 pour les toises que feront les 9 ouvriers.

122. D'où il suit que pour avoir le quatrieme terme de la regle de trois, il faut diviser le troisieme par le premier, & multiplier le quotient par le second.

123. Mais comme il arrivera dans plusieurs cas que le troisieme terme divisé par le premier, ne donnera pas un quotient exact, comme il l'a donné dans l'exemple qu'on vient de proposer, il faut, pour éviter les restes, multiplier le troisieme terme par le second, & diviser ensuite le produit par le premier ; ce qui donnera le même nombre que le produit du quotient du troisieme terme divisé par le premier, & multiplié après par le second.

Car, dans cet exemple, le troisieme terme 15 est trois fois plus grand que s'il avoit été divisé par le premier 3. Son produit par le second 9, est trois fois plus grand que son tiers 5 multiplié par

le même terme 9. Or le terme que l'on cherche, est le tiers de 15 multiplié par 9. Donc, puisque le produit de 15 par 9 est trois fois plus grand que le produit cherché, il faut le diviser par 3, pour avoir ce produit. Donc, on trouvera dans cet exemple le quatrieme terme de la regle, en multipliant le second & le troisieme terme, & divisant leur produit par le premier.

Comme ce même raisonnement peut s'appliquer à tous les autres exemples qu'on pourra proposer, il nous servira de démonstration de la regle de trois. Ceux qui en voudront une preuve plus rigoureuse, pourront consulter le traité des proportions dans *l'Arithmétique & la Géométrie de l'officier.*

II.

124. *Si avec 100 pistoles on en gagne 30, combien en gagnera-t'on avec 250.*

Il est clair que le gain doit être proportionné aux pistoles. Ainsi on aura $100 . 250 :: 30 . x$.

On trouvera, en faisant la regle, 75 pour la valeur de x ou du quatrieme terme.

III.

125. *Si 125 sacs de farine ont produit 22500 rations, * combien en produiront 458 sacs?*

Comme les sacs sont aux sacs, ainsi les rations doivent être aux rations.

$$125 . 458 :: 22500 . x.$$

On trouvera la valeur de x en multipliant 22500 par 458, & divisant le produit par 125. Le quotient sera 82440: c'est le nombre des rations que produiront les 458 sacs de farine, dans la supposition que 125 en ont produit 22500.

IV.

126. *On suppose que 150 pas d'une personne fassent 60 toises, on demande combien 670 pas de la même personne en feront.*

Comme les pas sont aux pas, ainsi les toises sont aux toises.

$$150 . 670 :: 60 . x.$$

* La ration du soldat est de 24 onces, ou d'une livre & demie de pain par jour. Un pain de munition qui pese trois livres, contient deux rations.

On trouvera 268 toiſes pour la valeur du quatrieme terme x.

V.

127. *Si avec 378 l. 15 ſ. 9 d. on a eu 125 toiſes 3 pieds d'un certain terrein, combien aura-t'on de toiſes du même terrein avec 1893 l. 18 ſ. 9 d.*

Comme le premier terme de cette regle eſt de différentes eſpeces, il faut le réduire aux plus petites, c'eſt-à-dire en deniers.

Pour cet effet on multipliera	378 liv.
par	20
Produit	7560 ſ.
On ajoutera au produit 7560 les 15 ſols joints aux livres du premier terme, & l'on aura 7575 ſ. qu'on réduira en deniers, en les multipliant par 12, & l'on aura 90900 deniers. Comme le premier terme a 9 deniers, on les joindra à ce nombre & l'on aura 90909	15 7575 ſ. 12 15150 7575. 90900 9 90909 ſ.

deniers pour ſa valeur réduite en deniers.

Le terme 1893 l. 18 ſ. 9 deniers étant de même réduit en deniers ſe trouvera de 454545 deniers.

Cette préparation étant faite, on posera la regle de cette maniere.

90909 . 454545 :: 125 toiſ. 3 p. X.

	125 toiſ. 3 pieds	
	2272725	
	909090.	
	454545..	
Pour les 3 pieds.	227272	3
Produit	57045397	3 { 627 toiſes.
qu'il faut div. par	90909..	
	249999.	
	90909.	
	681817	
	90909	
Reſte des toiſes qu'il faut multiplier par	45454	
	6	
Pour les reduire en pieds on aura	272724	
auxquels il faut ajouter les 3 pieds du dividende.	3	
On aura	272727	{ 3 pieds.
qui étant diviſés par	90909	
donnera 3 pieds au quotient. Ainſi le 4 terme de la regle propoſée eſt de 627 toiſes 3 pieds.	00000	

VI.

128. *On suppose qu'avec la somme de 1200 l. on a eu 37 toises 4 pieds d'un certain terrein, on demande à combien revient la toise de ce terrein.*

Pour résoudre cette question, on réduira d'abord les 37 toises en pieds, & l'on aura 226 pieds pour les 37 toises 4 pieds. Or comme la toise contient 6 pieds, on posera la regle de cette maniere.

$$226^{\text{pieds}} \,.\, 6^{\text{pieds}} :: 1200\,\text{l.} \,.\, x.$$

Faisant cette regle on trouvera pour le quatrieme terme 31 l. 17 s. 2 d.

VII.

129. *On suppose qu'on fasse un ouvrage en 12 jours, en travaillant quatre heures par jour, on demande le nombre des jours qu'on y employeroit si on travailloit six heures chaque jour.*

Dans cet exemple, les deux termes de même espece sont des heures, & ce sont eux qui doivent ainsi être les deux pre-

miers de la regle. Il s'agit de ſçavoir lequel doit être poſé le premier.

Pour cela il faut faire attention à l'énoncé de la regle, & à ce qu'elle propoſe de trouver.

Le terme que l'on cherche eſt des jours, mais il doit être plus petit que le troiſieme terme de la regle, qui eſt auſſi des jours, car il eſt évident qu'en travaillant ſix heures par jour au lieu de 4, on doit employer moins de jours à faire l'ouvrage. On voit donc qu'il faut mettre pour le premier terme de la regle le plus grand des deux termes de même eſpece, c'eſt-à-dire, le terme 6 des heures, afin de trouver le quatrieme terme moindre que le troiſieme.

Il faut donc poſer ainſi la regle qu'on vient de propoſer.

$6 . 4 :: 12 . x$. On trouvera 8 pour la valeur de ce quatrieme terme x, en faiſant l'opération à l'ordinaire. C'eſt le nombre des jours qu'on employeroit à faire l'ouvrage dont il eſt queſtion, en travaillant 6 heures par jours au lieu de 4.

REMARQUE.

130. Les arithméticiens appellent les regles de cette derniere eſpece dans

lesquelles le plus donne le moins, des regles de trois *inverses* ou *indirectes*, parce qu'en les posant à leur maniere, il faut, pour les résoudre, faire l'opération dans un ordre renversé, c'est-à-dire, multiplier le premier & le second terme ensemble, & diviser le produit par le troisieme ou le dernier.

Car pour résoudre la regle précédente, ils l'arrangeroient de cette maniere : $4 . 12 :: 6 . x$. Or faisant l'opération à l'ordinaire, en multipliant le second terme 12 par le troisieme 6, & divisant le produit 72 par le premier 4, on trouve 18 pour le dernier terme de la regle. Mais il est absurde qu'en travaillant plus d'heures, on soit plus de jours à faire le même ouvrage ; ce qui prouve que cette regle ne doit pas être faite à l'ordinaire. Si on la fait dans un ordre renversé, en multipliant le premier terme 4 par le second 12, & divisant le produit par le dernier 6, on a 8 pour le quatrieme de cette regle. C'est le nombre qui répond à la question ; car en travaillant six heures par jour au lieu de 4, on travaille un tiers de plus ; on doit donc par-là diminuer les jours d'un tiers, & en effet 8 est d'un tiers plus petit que 12. Ainsi, 8 est le terme qui répond à la question

proposée, & c'est le même qu'on a trouvé d'abord en arrangeant les termes de la regle dans l'ordre que demande la nature de la question.

Un peu d'attention fait faire cet arrangement avec facilité. Il n'y a qu'à penser à ce qui est proposé. Par-là on est dispensé de considérer des regles de trois de deux especes ; sçavoir de *directes*, qui sont celles qu'on a vues dans les quatre premiers exemples, dans lesquelles le plus donne le plus ; & d'*indirectes*, telles que celle qu'on vient de résoudre, dans lesquelles le plus donne le moins. On le verra clairement dans les exemples suivans.

131. Au reste, il est à propos de remarquer que les questions de cette espece se peuvent résoudre aisément sans regle de trois ; car puisqu'on est 11 jours à faire un ouvrage, en travaillant 4 heures par jour, il faut donc 48 heures pour le faire. Or, si on veut sçavoir combien on sera de jours à employer ces 48 heures, en travaillant six heures par jour, il est clair qu'on le sçaura en divisant 48 par 6.

VIII.

132. *Un Courier, en faisant 24 lieues*

par jour, ne peut arriver qu'en 8 jours au lieu qu'il ſe propoſe : il eſt néceſſaire, qu'il y arrive en 6, on demande combien il doit faire de lieues.

En faiſant attention à l'expoſé de cette queſtion, on voit que le nombre des lieues que le courier doit faire par jour, doit augmenter dans le rapport de la diminution des jours, & qu'ainſi il faut arranger de cette maniere les termes de cette regle.

$6 . 8 :: 24 . x$. On trouvera, en faiſant la regle, 32 pour la valeur de x.

REMARQUE.

133. On auroit trouvé également ce même nombre, en obſervant que, puiſque le courier employeroit 8 jours à faire ſon voyage, en faiſant 24 lieues par jour, il a 8 fois 24 lieues à faire, c'eſt-à-dire 192 lieues. Or, pour ſçavoir ce qu'il faut qu'il faſſe de lieues par jour pour faire ſon voyage en ſix jours, il eſt évident qu'il ne faut que diviſer 192 par 6 ; ce qui donne le même nombre qu'on a trouvé par la regle ci-deſſus. Mais on le trouveroit également, comme on le voit, de cette maniere, ſans être inſtruit de la regle de trois.

IX.

134. *45 ouvriers feroient un ouvrage en 54 jours, ſçavoir ce qu'il faut d'ouvriers pour le faire en 12 jours.*

On voit dans cet exemple, que le moins de jour doit donner plus d'ouvriers : il faut donc que le plus petit des deux termes de même eſpece de la regle, c'eſt-à-dire, 12 jours, ſoit mis le premier : elle doit donc être poſée ainſi. 12 . 54 :: 45 . x.

Faiſant l'opération à l'ordinaire, on trouvera pour la valeur de x, ou pour le nombre des ouvriers cherché 202, ou plutôt 203, à cauſe du reſte 6, qui dans cet exemple exprime une moitié d'ouvrier, qui ne peut avoir lieu.

REMARQUE.

135. Cette queſtion ſe réſoudroit encore en conſidérant, que puiſque 45 ouvriers feroient l'ouvrage dont il s'agit en 54 jours, il faut pour le faire 54 fois 45 journées d'ouvriers, c'eſt-à-dire, 2430 journées. Or, pour trouver le nombre d'ouvriers néceſſaire pour faire toutes

toutes ces journées en 12 jours, il n'y a qu'à diviser 2430 par 12 & le quotient 202 ou 203 sera le nombre d'ouvriers demandé.

On ne fera plus cette même remarque sur les regles suivantes, les commençans pourront la faire eux-mêmes. On le leur conseille, pour acquérir insensiblement l'habitude de réfléchir sur les choses qui leur seront proposées, & sur les différentes solutions qu'elles peuvent avoir.

X.

136. *Lorsque le setier de bled coûte 16 livres on a six livres de pain pour une certaine monnoie ; lorsqu'il ne vaudra plus que 12 liv. combien en aura-t'on pour la même monnoie.*

La diminution du prix du bled donne plus de pain pour la même monnoie : il faut donc trouver le quatrieme terme de la regle plus grand que 6. Ainsi le premier terme doit être le plus petit des deux termes de même espece, & elle doit se poser de cette maniere :

$$12 . 16 :: 6 . x.$$

On trouvera pour la valeur de x le

nombre 8, c'eſt celui des livres de pain qu'on demande.

XI.

137. *Si une plaine d'une certaine étendue a fourni du fourrage pour 16000 chevaux pendant 18 jours, combien 22000 chevaux pourront-ils y ſubſiſter de jours ?*

Le plus de chevaux donnera moins de jours, c'eſt pourquoi il faut, dans l'arrangement de la regle, mettre le plus grand nombre de chevaux au premier terme, & la poſer ainſi :

22000 . 16000 :: 18 . x.

On trouvera 13 pour la valeur du quatrieme terme, c'eſt-à-dire, pour le nombre des jours qu'on demande.

```
        16000
           18
       ------
       128000
       16000.
       ------
       . . . . . .
       288000  { 13 jours
       22000..
       ------
       .68000
       .22000
       ------
reſte  . . 2000
```

De la preuve de la Regle de trois.

138. La regle de trois se prouve par une autre regle de trois.

On prend pour les deux premiers termes de la nouvelle regle, le troisieme & le quatrieme de la premiere ; & pour le troisieme, le premier de la même. Faisant ensuite l'opération, elle doit donner pour le quatrieme terme de la nouvelle regle le second de la premiere.

Par exemple, pour faire la preuve de la regle de l'exemple premier, *n. 120*, dont les trois termes donnés sont *3*, *9*, & 15, & dont le quatrieme a été trouvé de 45, on prendra 15 pour le premier terme, 45 pour le second, *3* pour le troisieme : alors en faisant l'opération de cette seconde regle, on trouvera *9* pour son quatrieme terme ; ce qui prouve que la regle a été faite exactement.

On peut également prendre le quatrieme terme pour le premier, le troisieme pour le second, & le second pour le troisieme ; alors en faisant l'opération, on doit trouver pour le quatrieme terme le premier de la regle dont on fait la preuve.

REMARQUE.

139. Il faut obſerver que ces preuves ne peuvent ſe faire facilement que lorſque la diviſion qui donne le quatrieme terme, ſe fait exactement ou ſans reſte. Lorſqu'il y en aura un, on fera en particulier la preuve de la multiplication & de la diviſion qu'on fait dans la regle de trois : ces deux opérations étant exactes, la regle le ſera auſſi.

Des Regles de Trois compoſées

140. Les queſtions que l'on peut réſoudre par le moyen de la regle de trois, renferment quelquefois plus de trois termes : alors on peut les réſoudre par pluſieurs regles de trois ; ce qui leur fait donner le nom de *Regle de Trois compoſées*. On peut auſſi les réſoudre par une ſeule, comme on le verra bientôt. On appelle *Regles de Trois doubles*, celles qui ont cinq termes, & qui exigent deux regles ſimples ; *Triples*, celles qui en exigent trois, & ainſi des autres.

PREMIER EXEMPLE.

141. *Si 100 ſoldats dépenſent 40 écus*

en trois jours, en quel nombre de jours 10000 soldats dépenseront-ils 200000 écus ?

Le nombre des jours que l'on cherche dépend du nombre des soldats & du nombre d'écus ; on le trouvera par deux regles de trois de cette maniere.

Pour la premiere, on dira, comme les 100 soldats sont aux 10000 soldats, ainsi la dépense des premiers (40 écus pendant trois jours) est à la dépense des seconds pendant le même temps : ou, 100 . 10000 :: 40 . x.

On trouvera 4000 écus pour le quatrieme terme de cette regle : c'est ce que dépenseroient les 10000 soldats pendant trois jours.

Il s'agit de sçavoir à présent en combien de temps ils dépenseront 200000 écus.

On le trouvera en disant : comme 4000 écus est à 200000 écus, ainsi 3 jours est au nombre de jours cherché ou 4000 . 200000 :: 3 . x.

On trouvera 150 pour ce quatrieme terme x. C'est le nombre de jours qui répond à la question proposée.

SECOND EXEMPLE.

142. *Si 450 travailleurs font 1200*

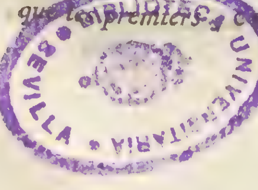
toises de tranchée en trois nuits, en travaillant 6 heures chaque nuit, combien 1350 travailleurs en feront-ils en 5 nuits, en travaillant 4 heures par nuit?

Il eſt clair par l'énoncé de cette queſtion, que le nombre de toiſes que l'on cherche, dépend de trois choſes; ſçavoir, des ouvriers, des nuits, & des heures de leur travail. Il y aura ainſi trois comparaiſons ou trois regles de trois à faire. La premiere ſera celle des ouvriers, & elle ſe poſera ainſi,

450 Ouv. 1350 Ouv. :: 1200 Toiſ. x.

On trouvera pour le quatrieme terme de cette regle 3600. C'eſt le nombre de toiſes que feroient les 1350 ouvriers dans le même temps que les premiers en feroient 1200.

Comme les derniers ouvriers travaillent plus de nuits que les premiers, leur travail doit augmenter dans le rapport des nuits. Pour le trouver proportionné aux nuits, on dira, *comme trois nuits eſt à 5 nuits, ainſi 3600 toiſes eſt au nombre de toiſes que les 1350 ouvriers feroient en 5 nuits, en travaillant autant d'heures que les premiers*; c'eſt-à-dire, que



seconde regle de trois doit être posée de cette maniere :

3 nuits. à 5 :: 3600 toiſ. . x.

Faiſant cette regle, on trouvera pour le quatrieme terme 6000 toiſes.

Mais ces 6000 toiſes ſont trouvées dans la ſuppoſition que les 1350 travailleurs travaillent 6 heures chaque nuit ; les 6000 toiſes doivent diminuer dans le rapport des heures de travail. Pour avoir cette diminution, il faut faire une troiſieme regle de trois, poſée de cette maniere :

Comme 6 heures ſont à 4 heures, ainſi 6000 toiſes ſont au quatrieme terme cherché, ou 6 . 4 :: 6000 . x.

On trouvera pour ce quatrieme terme 4000 toiſes. C'eſt le nombre qui répond à la queſtion propoſée, c'eſt-à-dire, c'eſt celui que feroient les 1350 ſoldats en 5 nuits, en travaillant 4 heures chaque nuit, dans le temps que les 450 ouvriers en feroient 1200 en 3 nuits en travaillant 6 heures par nuit.

143. Pour réſoudre les deux queſtions précédentes par une ſeule regle de trois.

J'obſerve d'abord pour le premier exemple (*n. 141*) que les ſoldats dépen-

ſent 40 écus en trois jours, on aura le nombre des journées de dépenſe de tous ces ſoldats, en multipliant leur nombre 100 par 3, ce qui donne 300.

Préſentement je fais cette regle de trois.

Comme 40 écus eſt à 200000 écus, ainſi 300 nombre des journées de dépenſe des premiers ſoldats eſt à celui des journées de dépenſe des ſeconds.

Ou 40 . 200000 :: 300 . x.

Faiſant cette regle on trouve pour le quatrieme terme 1500000.

Ce nombre exprime les journées de chaque ſoldat que fourniſſent les 200000 écus propoſés. Comme ces ſoldats ſont au nombre de 10000, diviſant 1500000 par 10000, on aura 150 pour le nombre cherché; c'eſt-à-dire pour le nombre de jours pendant leſquels les 10000 ſoldats dépenſeront 200000 écus.

144. A l'egard du ſecond exemple (*n.* 141.) je cherche d'abord le nombre d'heures que les premiers ouvriers ont travaillé.

Pour cet effet je multiplie le nombre 450 des ouvriers par le nombre des nuits qu'ils ont travaillé, c'eſt-à-dire,

par 3, ce qui me donne 1350; enſuite je multiplie ce dernier nombre par celui des heures de travail; chaque nuit ſçavoir, dans ces exemples, par 6. Le produit 8100 eſt le nombre d'heures de travail des 450 ouvriers.

Préſentement je cherche de la même maniere le nombre d'heures que doivent travailler les 1350 ouvriers, c'eſt-à-dire, en multipliant 1350 par 5, & le produit qui en réſulte, par 4; ce qui me donne 27000 heures.

Je fais enſuite cette regle de trois.

Comme les heures de travail des premiers ouvriers (*8100*) ſont à celle des ſeconds (*27000*), ainſi le travail des premier (*1200 toiſes*), eſt à celui des ſeconds.

Poſant cette regle à l'ordinaire, l'on a

$$8100 . 27000 :: 1200 . x.$$

Le quatrieme terme ſe trouvera de 4000 toiſes, comme on l'a trouvé *n. 141*.

Ces deux exemples peuvent ſuffire pour faire connoître la maniere de réduire les regles de trois compoſées, aux regles de trois ſimples.

❁

REGLE DE COMPAGNIE.

145. *La Regle de Compagnie* eſt une regle qui ſert à partager un nombre donné en parties ſemblables à celles d'un autre nombre auſſi donné. Elle ne conſiſte que dans la regle de trois répetée autant de fois que l'on a de différens partages à faire. Quelques exemples ſuffiront pour mettre en état d'en réſoudre un grand nombre d'autres, ſans qu'il ſoit queſtion d'entrer ſur cela dans un grand détail.

PREMIER EXEMPLE.

146. *On ſuppoſe que trois particuliers s'étant aſſociés enſemble, ont fait un fonds de 48000 livres avec lequel ils ont gagné 120000 livres; il s'agit de partager ce gain entre ces aſſociés, proportionnellement à la quantité d'argent que chacun a fourni.*

Si chacun de ces particuliers avoit mis la même ſomme, il eſt évident qu'il faudroit partager le profit également.

Mais on suppose,

que le premier a mis	12000 l.
le second	16000
& le troisieme	20000
Total du fonds	48000

Il faut faire autant de regles de trois qu'il y a de particuliers, & prendre pour les deux premiers termes de toutes ces regles le fonds 48000 livres & le gain 120000 liv. Les troisiemes termes seront les parties que les particuliers ont chacun contribué pour faire le fonds de 48000 liv.

La premiere regle se posera ainsi, pour trouver le gain de celui qui a mis 12000 l.

Si 48000 livres gagnent 120000 livres, combien gagneront 12000 ?

Ou $48000 . 120000 :: 12000 . x$.

On trouvera 30000 livres pour le gain du premier.

Pour le second, on dira de même: si 48000 liv. gagnent 120000 livres, combien doivent gagner 16000 liv.

Ou $48000 . 120000 :: 16000 . x$.

On trouvera pour le quatrieme terme de cette regle, ou pour le gain du second associé 40000 liv.

Pour le troisieme, on dira de même, si 48000 liv. gagnent 120000 livres, que doivent gagner 20000 livres?

Ou 48000 . 120000 :: 20000 . x.

La regle étant faite, donnera 50000 liv. pour le gain du troisieme.

On fera la preuve de cette regle en ajoutant ensemble les trois profits particuliers, dont la somme doit être égale aux 120000 liv. du gain de la société.

Gain du premier	*30000 l.*
Gain du second	*40000*
Gain du troisieme . . .	*50000*
Preuve	*120000*

REMARQUES.

I.

147. Il est clair que cette regle n'auroit pas été plus difficile si on avoit supposé un plus grand nombre d'associés, mais que son opération auroit seulement été plus longue.

II.

148 Lorsqu'il se trouve un reste dans les divisions des regles de trois qu'on

fait pour la regle de compagnie, il faut, pour la preuve, additionner ensemble les restes de chaque division, les diviser ensuite par le diviseur commun, ou par le fonds de la société, ou le premier terme de toutes les regles de trois : ce diviseur sera toujours contenu un certain nombre de fois exactement dans ces restes, lorsque l'opération sera exacte, & il ne s'agira plus que d'ajouter à l'addition de tous les gains particuliers, autant d'unités qu'il sera contenu de fois dans les restes, & l'on aura, si la regle est bien faite, le fonds total qui étoit à partager ; c'est ce qu'on va pratiquer dans l'exemple suivant.

SECOND EXEMPLE.

149. *On suppose que 3 Officiers de cavalerie ont fait un profit de 12000 liv. sur les fourrages de leurs chevaux pendant leur quartier d'hyver, on demande ce qui doit revenir à chacun d'eux de cette somme.*

On suppose que

Le premier Officier avoit	50 Chevaux
Le second	120
Le troisieme	140
TOTAL	310 Chevaux

Cette regle se fera comme la précédente, c'est-à-dire, qu'on aura autant de regles de trois qu'il y aura d'officiers ; que les deux premiers termes de ces regles seront le nombre 310 des chevaux, & le gain 12000 livres ; qu'à l'égard des troisiemes termes, ils seront formés du nombre des chevaux de chaque Officier. Les quatriemes termes qu'on trouvera, donneront le gain de chacun.

Pour avoir le gain du premier Officier, l'on dira : *Si 310 chevaux gagnent 12000 livres, combien gagneront 50 chevaux ?*

Ou 310. 12000 :: 50. x.

Faisant l'opération de cette regle de trois, on trouvera pour le gain de ce premier Officier, 1935 liv. 9 s. 8 den. avec le reste 40 deniers.

La regle pour le gain du second sera 310. 12000 :: 120. x.

On trouvera pour son quatrieme terme 4645 liv. 3 s. 2 den. avec le reste 220 deniers.

Pour avoir le gain du troisieme, l'on fera aussi 310. 12000 :: 140. x, qu'on trouvera de 5419 liv. 7 sols 1 den. avec le reste 50 den.

On fera la preuve de cette regle de compagnie, comme celle de la précédente, c'eſt-à-dire, en ajoutant enſemble les profits de chaque Officier dont la ſomme doit être égale à 12000 livres; mais comme il y a des reſtes dans les diviſions des regles de trois, on ajoutera ces reſtes enſemble & l'on diviſera leur ſomme 310 par le diviſeur commun, qui dans cet exemple eſt auſſi 310, on aura le quotient 1, qu'il faudra ajouter à la colonne des deniers de la preuve, ainſi qu'on vient de le marquer ci-devant.

Gain du 1er. Officier	1935 l.	9 ſ.	8 d.
Gain du ſecond	4645	3	2
Gain du troiſieme	5419	7	1
Quotient des reſtes diviſés par 310.			1
Preuve	12000 l.	0	0 d.

Regle de Compagnie par tems.

150. Cette regle eſt appellé par tems, parce que les particuliers qui font un fonds de ſociété, y mettent chacun leur argent pour un tems limité. Ainſi le gain de la ſociété doit ſe partager, non-

seulement suivant la quantité dont chaque particulier a contribué au fonds commun, mais encore suivant le tems qu'il a laissé son argent dans ce fonds.

EXEMPLE.

151. *On suppose que trois particuliers on fait ensemble, pour un entreprise de commerce, un fonds d'argent;*

Que le premier a mis 30000 livres pour 8 mois.

Le second 20000 livres pour 16 mois;

Et le troisieme 12000 livres pendant 4 mois.

On suppose aussi que la société a fait 50000 livres de profit pendant le plus long terme de sa durée, c'est-à-dire, pendant 16 mois; sçavoir ce qu'il revient de profit à chacun?

Pour découvrir quel doit être ce produit, je considere qu'une somme d'argent mise dans un fonds pour un tems quelconque, comme pour 8 mois, doit produire la même chose que ce qu'une somme huit fois plus grande produiroit en un mois. D'où je conclud qu'il faut multiplier la somme que chaque particu-

lier a miſe dans la ſociété, par le nombre des mois qu'elle y eſt demeurée, & qu'il faut regarder le profit qui en réſulte comme le fonds fait par ce particulier.

Ainſi je multiplie les 30000 livres du fonds du premier par le nombre 8 des mois que ſon argent eſt reſté dans la ſociété; ce qui donne le produit 240000 liv. que je regarde comme le fonds du premier.

Je multiplie de même les 20000 liv. du ſecond par les 16 mois que ſon argent eſt reſté dans la ſociété, ce qui produit 320000 liv. que je regarde auſſi comme le fonds du ſecond.

Enfin je multiplie les 12000 liv. du troiſieme par 4, c'eſt-à-dire, par le nombre des mois que ſon argent a reſté dans la ſociété, & j'ai le produit 48000 liv. que je regarde comme le fonds du troiſieme particulier.

Fonds ſuppoſé du premier	240000 l.
Du ſecond	320000
Du troiſieme	48000
Total	608000 l.

J'ajoute enſemble ces 3 produits, &

j'ai 608000 liv. que je regarde comme le fonds qui a gagné 50000 liv.

Il ne s'agit plus après cela que d'opérer comme dans la regle de compagnie simple, c'est-à-dire, de faire autant de regles de trois qu'il y a de particuliers, dont les deux premiers termes seront 608000 liv. & 50000 liv.

On aura pour la premiere

608000 . 50000 :: 240000 . x.

Le quatrieme terme de cette regle, ou le gain du premier, sera de 19736 liv. 16 f. 10 d. avec un reste de 64000 deniers.

Pour le gain du second, on posera 608000 . 50000 :: 320000 . x. On trouvera pour le quatrieme terme de cette regle, 26315 liv. 15 f. 9 deniers, avec un reste de 288000 deniers.

Pour le gain du troisieme, on posera de même 608000 . 50000 :: 48000 . x. On trouvera ce quatrieme terme de 3947 liv. 7 f. 4 den. avec un reste de 256000 deniers.

On fera la preuve de cette regle de compagnie, en additionnant, comme dans la précédente, le gain de chaque

associés, dont la somme doit être égale aux 50000 liv. du gain total de la société.

Gain du premier	19736 l.	16 s.	10 d.
Gain du second	26315	15	9
Gain du troisieme	3947	7	4
Pour le quotient de la somme des restes, divisée par le diviseur commun ...		0	1
Preuve	50000 l.	00 s.	0 d.

Fin de l'Arithmétique.



ABRÉGÉ D'ARITHMÉTIQUE ET DE GÉOMÉTRIE.

SECONDE PARTIE

Contenant la Géométrie.

I.

Définitions ou explications des différentes propositions dont on se sert dans la Géométrie, & de ses premiers principes.

La Géométrie est une science qui a pour objet les propriétés du corps ou de l'étendue. Elle enseigne généralement à faire des figures, à les mesurer, & à en découvrir les différens rapports.

1. On appelle *Proposition* l'expression dont on se sert pour énoncer ce que l'on propose. Voici celles qui sont les plus en usage dans la Géometrie.

2. *Définition*, est l'explication d'un mot ou d'une chose, qui en détermine l'idée, & qui ne convient qu'au mot ou à la chose.

3. *Axiome*, est une proposition si évidente, qu'elle n'a pas besoin de démonstration.

4. *Théorême*, est une proposition dont il faut faire voir la vérité.

5. *Problême*, est une proposition par laquelle il s'agit de faire quelque chose, & de démontrer qu'on l'a fait.

6. *Corollaire*, est une suite ou une conséquence d'une proposition précédente.

Axiomes qui servent de base ou de premiers principes à la Géométrie.

I.

7. Le tout est plus grand que sa partie; mais il est égal à toutes ses parties prises ensemble.

II.

8. Si de plusieurs choses égales on en retranche d'autres aussi égales, les

reſtes ſeront égaux, & ſi on leur en ajoute d'égales, les ſommes ſeront auſſi égales.

III.

9. Si à des choſes quelconques, on ajoute une même choſe, & que les ſommes ſe trouvent égales, ces choſes étoient égales avant l'addition ; & ſi de pluſieurs choſes on en retranche la même choſe, & que les reſtes ſoient égaux, les choſes étoient auſſi égales entr'elles avant le retranchement de la derniere.

IV.

10. Deux ou pluſieurs grandeurs égales à une même grandeur, ſont égales entr'elles.

V.

11. Les produits de pluſieurs choſes égales, ſont égaux, & les nombres égaux diviſés par d'autres nombres auſſi égaux, ſont égaux.

Il y a des propoſitions *directes*, & des propoſitions *converſes*.

12. La propoſition directe, eſt celle qui annonce une vérité qui ſe tire d'une ſuppoſition particuliere, & la converſe eſt celle dans laquelle on prend pour

ſuppoſition la conſéquence de la directe, & où l'on a pour conſéquence la ſuppoſition de cette directe.

II.

Des lignes & des ſuperficies.

On diſtingue dans la Géometrie trois ſortes d'étendues ou dimenſions.

13. *La Ligne* eſt l'étendue conſidérée avec une ſeule dimenſion, & *la ſuperficie ou ſurface*, l'étendue conſidérée avec la longueur & la largeur, ou avec deux dimenſions, & enfin le *corps* ou le *ſolide* eſt l'étendue conſidérée avec ſes trois dimentions, c'eſt-à-dire, avec la longueur, la largeur, la hauteur, épaiſſeur, ou profondeur.

Remarque.

14. Il n'y a point de corps ou d'étendue ſans les trois dimenſions dont on vient de parler ; mais on peut les conſidérer chacune en particulier, en faiſant abſtraction des autres.

Par exemple, lorſqu'on parle de la diſtance d'une ville à une autre, comme

de Paris à Rome, on ne fait aucune attention à la largeur du chemin; on considere seulement la longueur de l'espace qui est entre ces deux villes, c'est-à-dire, qu'on considere alors l'étendue avec une seule dimension. De même, lorsque l'on parle de la glace d'un miroir, on ne fait nulle attention à l'épaisseur de cette glace; on considere seulement sa longueur & sa largeur : il en est de même, lorsqu'il s'agit de l'étendue d'un champ ou d'un terrein; car on ne fait non plus aucune attention à sa profondeur : on considere donc alors l'étendue avec deux dimensions. Mais si l'on examine la masse d'un corps, comme une piece de bois, une pierre, un lingot d'or, l'excavation d'un fossé, &c. on fait attention alors aux trois dimensions du corps, qui est d'autant plus grand, qu'il a plus de longueur, de largeur, & de hauteur ou de profondeur.

15. *Le Point Mathématique* est une partie de l'étendue qu'on considere comme indivisible, ou sans longueur, largeur, ni profondeur.

Fig. 1. Soit le corps A B C D E F, toutes ses parties extérieures considérées sans épaisseur, forment sa superficie, & le corps

corps, eſt l'eſpace terminé ou renfermé par cette ſuperficie.

La ſuperficie eſt donc le terme du corps, puiſqu'elle le termine; mais elle eſt terminée elle-même par des lignes qui ſont auſſi les termes de la ſuperficie; ces lignes n'ont ni largeur, ni épaiſſeur, ce qui les termine n'a donc ni longueur, ni largeur ni profondeur. Donc, ce ſont des points mathématiques.

La ligne eſt *droite* ou *courbe*.

16. La *Ligne droite* eſt celle qui va directement d'un point à un autre, comme la ligne AB. Elle exprime le plus court chemin, ou la plus courte diſtance entre les deux points A & B. *Fig. 2.*

17. La *Ligne courbe* eſt celle qui ne va pas directement d'un point à un autre, comme la ligne CD, qui ne va pas du point C au point D par le chemin le plus court : ainſi elle n'eſt pas la plus courte qu'on puiſſe tirer entre les points CD. *Fig. 3.*

18. On appelle *Ligne courbée*, une ligne compoſée de pluſieurs lignes droites, d'une grandeur ſenſible, comme la ligne ABCD. *Fig. 4.*



THÉORÊME. I.

19. *La position d'une ligne droite, comme AB, est déterminée par celle de ses deux points A & B.*

Fig. 5. Car il est clair que d'un point comme A, on peut faire partir une infinité de lignes droites, comme AC, AD, &c. mais que si l'on marque un autre point comme B, par où la ligne droite doive passer, sa position AB est alors déterminée par les deux points A & B.

20. Il suit delà, 1°. que lorsque dans la suite on cherchera à décrire une ligne droite dans des circonstances demandées, il faudra seulement trouver deux points dans ces circonstances, & que la ligne droite qui passera par ces deux points, sera la ligne demandée.

21. 2°. Que les deux points A & B de la ligne droite AB, qui déterminent la position de cette ligne, déterminent également celle de toutes les lignes droites qui passeront par ces deux points, & qui s'étendront à l'infini de part & d'autre; car si le prolongement de ces lignes s'écartoit à droite ou à gauche de A ou de B, elles ne seroient plus droites,

Donc les deux points A & B déterminent à l'infini la poſition de toutes les lignes droites qui ont deux points de communs avec AB, leſquelles peuvent ainſi être conſidérées comme des prolongemens de AB.

22. 3°. Que deux lignes droites comme AB, CD, ne peuvent ſe couper que dans un point E, car ſi elles avoient deux points de communs comme E & F, elles ne feroient qu'une ſeule & même ligne AB, attendu qu'elles auroient la même poſition. Fig. 6.

THÉORÊME II.

23. *Par deux points quelconques, comme A & B, on peut faire paſſer une infinité de lignes courbes.* Fig. 7.

Cette propoſition eſt évidente; car la courbure des lignes pouvant varier d'une infinité de façons, elles peuvent faire différens détours de tous côtés, & revenir paſſer par les mêmes points A & B.

24. D'où il ſuit, 1°. que la ſituation ou poſition d'une ligne courbe n'eſt pas déterminée par deux points, mais qu'il peut en être beſoin d'une grande quan-

tité, suivant la nature de sa courbe.

25. Et 2°. que deux lignes courbes peuvent se couper dans plusieurs points.

THÉORÊME III.

26. *Si par deux points A & B d'une ligne droite, il passe plusieurs lignes courbes, la plus courte est celle qui est la plus proche de la droite A B, & elles sont d'autant plus longues, qu'elles s'écartent ou s'éloignent de cette ligne.*

Cette proposition est évidente, car la ligne la plus courte de A en B, est la
* *N. 16.* droite B D * : or, si l'on imagine que cette ligne soit exprimée par un fil de soie arrêté en A & en B, il est clair que
Fig. 7. pour lui donner une direction courbe, il faut lâcher le fil de soie de A ou de B, & qu'il en faut lâcher d'autant plus, que la courbure s'éloigne de AB. Donc, &c.

REMARQUE.

Fig. 8. 27. On suppose dans la précédente proposition, que la courbure des lignes est à peu près la même ; car si la plus proche de la ligne droite CD étoit comme la ligne C E D, alors cette ligne

pourroit être plus grande que CFD, qui est plus éloigné de CD, que CED.

Il est évident que cette même proposition s'applique aux lignes courbées, comme aux lignes courbes.

Maniere particuliere de considérer la ligne & la surface.

28. La ligne peut se concevoir, comme décrite par le mouvement d'un point qui s'éloigne de sa premiere position.

29. S'il s'en éloigne directement, sans se détourner ni à droite ni à gauche, il décrit une ligne droite ; autrement, il décrit une ligne courbe.

30. Il suit de cette formation, que la ligne peut être considérée comme composée d'une infinité de points.

De la même maniere qu'il y a deux sortes de lignes, sçavoir, des droites & des courbes, il y a aussi deux sortes de surfaces ou superficies ; sçavoir,

La superficie *plane* ou *platte*, & la superficie *courbe*.

31. La superficie plane est celle sur laquelle on peut tirer des lignes droites de tous sens ; telle est la superficie d'un miroir ordinaire, d'une table, &c.

32. La superficie courbe, est celle sur

laquelle on ne peut tirer des lignes droites de tout ſens ; comme la ſuperficie d'une boule, d'une orange, &c.

33. La partie ſaillante ou relevée d'une ſuperficie courbe, ſe nomme ſa partie *convexe*, & ſa partie creuſe ou rentrante, ſe nomme ſa partie *concave*.

34. La ſuperficie peut être conſidérée comme décrite par le mouvement d'une ligne droite qui s'éloigne également & uniformement de ſa premiere poſition. Si elle s'en éloigne par le plus court chemin, elle décrit une ſuperficie plane, autrement elle en décrit une courbe.

35. Une ſuperficie plane, que l'on conſidere ſans faire attention à ſes extrêmités, ou comme indéfinie, ſe nomme *plan*.

36. Ainſi, tirer une ligne ſur un plan n'eſt autre choſe que tirer une ligne ſur une ſuperficie indéfinie, comme ſur un papier, dont on ne conſidere pas la grandeur.

37. On appelle *figure*, une eſpace terminé de tous côtés par des lignes.

38. La *figure plane* eſt celle dont la ſuperficie eſt plane ; celle qui a une ſuperficie courbe, ſe nomme *figure courbe*.

39. Il y a encore la *figure ſolide*, qui eſt le corps ou le ſolide, terminé de tous côtés par des ſurfaces.

III.

Du cercle & de ſa circonférence.

40. Le cercle eſt une figure plane, terminée par une ligne courbe ABDE, qui a tous ſes points également diſtans d'un point intérieur C, qui ſe nomme le *centre du cercle*. Fig. 9.

41. La ligne ABDE, qui termine le cercle, ſe nomme *ſa circonférence.*

42. La circonférence du cercle peut être conçue comme décrite par le mouvement d'une ligne droite inflexible, autour d'une de ſes extrêmités : car il eſt évident que cette ligne ſe mouvant autour de A, ſon extrêmité B décrira une ligne, dont tous les points ſeront également diſtans de A, c'eſt-à-dire une circonférence de cercle, dont A ſera le centre. Fig. 10.

43. On nomme *diametre*, dans un cercle, toute ligne droite comme AB, qui paſſe par ſon centre C, & qui ſe termine de part & d'autre à ſa circonfé- Fig. 11.

rence ; & l'on nomme *rayon* toute ligne droite, comme CD, tirée du centre C, du cercle à sa circonférence.

44. Il est clair que le diametre est composé de deux rayons, c'est pour cela qu'on appelle quelquefois, le rayon *demi-diametre*.

Fig. 12. 45. Un *arc* est une partie quelconque de la circonférence du cercle, comme ACB. La *corde de l'arc* est une ligne droite AB qui en joint les extrêmités.

REMARQUE.

46. La ligne AB est également la corde de l'arc inférieur ADB qui acheve la circonférence, comme celle de l'arc ACB ; mais dans l'usage ordinaire, lorsque l'on parle de la corde d'un arc, on conçoit toujours, à moins qu'on ne l'explique autrement, qu'elle appartient au plus petit arc.

Fig. 13. 47. On appelle *circonférences concentriques*, des circonférences comme ABDE, *abde*, &c. décrite du même centre C.

48. Les Géometres divisent chaque circonférence de cercle en 360 parties égales, appellées *dégrés* ; chaque dégré en 60 parties égales, appellées *mi-*

nutes, chaque minute en 60 secondes, &c.

49. Ainsi, un *dégré* est la 360e partie de la circonférence d'un cercle ; or, il y a des circonférences de toutes sortes de grandeurs ; il y a donc pareillement des dégrés de différentes grandeurs ; de sorte que le dégré n'est pas d'une quantité déterminée, comme d'un pied ou d'une toise, mais sa grandeur est relative à celle de la circonférence à laquelle il appartient ; ce qu'il faut bien remarquer.

THEORÊME I.

50. *Dans un cercle, ou dans des cercles égaux, les rayons sont égaux de même que les diametres, les arcs de même nombre de dégrés, & les cordes qui soutiennent des arcs égaux.*

Cette proposition est évidente, à cause de la définition & de l'uniformité du cercle.

THEORÊME II.

51. *Tout diametre coupe la circonférence & le cercle en deux parties égales.*

Soit le cercle X, dans lequel on a tiré le diametre AB, il faut démontrer, Fig. 14

que ce diametre coupe le cercle & sa circonférence en deux également.

Pour cet effet, il faut ſuppoſer le cercle plié en deux parties ſur le diametre, & renverſées l'une ſur l'autre. Dans cet état elles doivent ſe couvrir exactement, autrement tous les points de la circonférence du cercle ne ſeroient pas également éloignés du centre, ce qui eſt contraire à ſa définition. Donc les deux parties du cercle formé par le diametre AB, ſont égales; donc le diametre coupe le cercle & ſa circonférence en deux également.

Fig. 14. 52. Tout arc, comme A D B, qui a pour corde le diametre d'un cercle, étant la moitié de la circonférence du cercle, on le nomme *demi-circonférence*, & comme l'eſpace renfermé par une demi-circonférence & par ſon diametre, eſt de même la moitié du cercle, on le nomme auſſi *demi-cercle*.

COROLLAIRE.

Fig. 15. 53. Il ſuit de la propoſition précédente, *n.* 51, que ſi l'on prend ſur une ligne droite A B un point quelconque, comme C, duquel on décrive un arc ſur cette ligne, terminé en A & en B de part & d'autre du point C, cet arc ſera une

demi-circonférence ; puisque la ligne AB lui servira de diametre.

THEOREME III.

54. *Si du centre C de plusieurs circonférences concentriques, on tire à volonté deux rayons C A & C B à la plus grande circonférence, les arcs de chacune de ces circonférences compris entre ces mêmes rayons, auront la même quantité de dégrés.*

Pour le démontrer, considérez que si l'arc AB est par exemple la sixieme partie de sa circonférence, l'arc *a b* sera aussi la sixieme partie de la sienne. Or, ces circonférences ont le même nombre de dégrés : sçavoir 360. Toutes leurs parties semblables, comme leurs sixiemes parties, leurs huitiemes, &c. auront le même nombre de dégrés. Donc les deux rayons C A & C B comprennent entr'eux des arcs de même nombre de dégrés de toutes les circonférences concentriques renfermées par A B D A Donc, &c. *Fig. 16.*



PROBLEMES.

PREMIER PROBLEME.

55. *Deux points étant donnés, tirer une ligne droite de l'un à l'autre.*

Fig. 17. Soient les points donnés A & B, on posera une *regle* sur ces deux points, de maniere qu'en traçant une ligne le long de la regle avec une plume ou un crayon, elle passe par les points A & B, & qu'elles les couvre entiérement.

SECOND PROBLEME.

56. *Décrire un cercle qui ait pour rayon une ligne donnée AB.*

Fig. 18. Il faut prendre un *compas*, poser une de ses pointes au point A, & ouvrir l'autre jusqu'à ce qu'elle tombe sur B, ensuite la premiere pointe restant au point A, il faut faire mouvoir l'autre autour de ce point, & elle décrira le cercle demandé.

TROISIEME PROBLEME.

57. *Deux points A & B étant donnés*

ſur un plan, trouver une ligne droite CD qui en ait tous ſes points également diſtans.

Comme la ſituation d'une ligne droite dépend de deux points ; il s'en ſuit que, pour réſoudre ce problême, il faut ſeulement trouver deux points C & D, également éloignés de A & de B, & que la ligne qui paſſera par ces deux points, ſera la ligne demandée. Fig. 19.

Opération.

De chacun des points A & B pris pour centres, & d'une ouverture de compas priſe à volonté ; décrivez au deſſus & au deſſous des points A & B, deux arcs qui ſe coupent en C & en D ; tirez par les points d'*interſection*, (c'eſt ainſi qu'on appelle les points communs à des lignes droites ou courbes qui ſe coupent) C & D la ligne droite CD, elle aura tous ſes points également diſtans de A & de B.

Pour le démontrer, il faut ſeulement prouver que le point C eſt autant éloigné de A que de B, de même que le point D.

Pour cela, conſidérez que le point d'interſection C eſt commun aux deux

parties égales, en le divisant d'abord en deux également, & divisant ensuite chaque moitié aussi en deux également, puis chaque quart de même, &c.

SIXIEME PROBLÊME.

62. *Faire passer la circonférence d'un cercle par trois points donnés A, B & C, qui ne sont pas rangés en ligne droite.*

Fig. 24. Il faut trouver d'abord une ligne droite DE, qui ait tous ses points également distans des deux premiers points donnés A & B; puis une autre ligne droite FG qui ait aussi tous ses points également distans du point B & du point C; ces lignes se couperont dans un point H, qui sera le centre du cercle qui passera par les trois points donnés; ensorte que si de ce point pris pour centre, & de l'intervalle HA on décrit une circonférence de cercle, elle passera par B & par C.

Pour le démontrer, il faut considérer que le point H appartient également aux deux lignes DE, FG. Si on le considere, comme appartenant à la premiere ligne, il est également distant de A & de B, & si on le considere après cela comme faisant partie de la seconde, il est également distant de B & de C; les

distances A H & H C sont donc chacune égales à la distance HB : donc ces trois distances sont égales *. Donc, &c. * N. 102

COROLLAIRE.

63. Il suit de ce problême que trois points qui ne sont pas rangés en ligne droite, déterminent la grandeur du cercle dont la circonférence passe par ces points ; ensorte que toutes les circonférences qui passeront par ces trois points, auront toujours le même centre & le même rayon, c'est-à-dire, qu'elles seront égales.

Exécuter sur le terrein les Problêmes précédent.

Tous les problêmes renfermés dans cet article peuvent s'exécuter sur le terrein presque aussi facilement que sur le papier. On va le faire voir en peu de mots.

64. 1°. Pour tracer une ligne droite sur le terrein, qui passe par deux points donnés A & B,

Il faut planter un piquet en A, & un autre en B ; tendre ensuite un cordeau d'un piquet à l'autre, & tracer la ligne AB le long de ce cordeau. Fig. 25.

Si les piquets A & B ſont fort éloignés l'un de l'autre, on fera mettre quelque choſe au haut du piquet B, qui puiſſe ſervir à le faire diſtinguer de loin, comme une carte à joüer, ou du papier blanc. On ſe mettra enſuite derriere le piquet A, & l'on fera planter d'autres piquets entre AB, de maniere qu'ils ſe trouvent cachés par le piquet A, & qu'ils puiſſent être conſidérés comme des points de la ligne AB, ou, ce qui eſt la même choſe, qu'ils ſoient tous dans l'alignement ou la direction de A & B. Tendant après cela un cordeau ſucceſſivement d'un piquet à l'autre, on tracera la ligne AB le long de ce cordeau.

REMARQUE.

Fig. 26. 65. Il eſt évident, que lorſque l'on a deux points A & B, donnés ſur le terrein, on peut prolonger à volonté la ligne droite qui paſſe par ces deux points; car pour cela il ſuffit de faire planter des piquets au-delà de B, & dans l'alignement de A & de B, comme en C & en D, & tracer enſuite avec le cordeau la ligne AD.

Fig. 27. 66. 2°. Pour tracer la circonférence d'un cercle ſur le terrein, le rayon CA, & le centre C étant donnés,

On prendra un cordeau de la longueur

du rayon, lequel aura un nœud coulant à chacune de ſes extrêmités. On plantera, ou on enfoncera un piquet au centre C du cercle, dans lequel piquet on paſſera un des nœuds coulans du cordeau égal au rayon. On mettra après cela un piquet A dans le deuxieme nœud coulant, & tenant le cordeau bien tendu, on fera tourner le piquet A autour du piquet C, de maniere que la pointe de ce piquet trace une ligne courbe ſur le terrein. Cette ligne ſera la circonférence du cercle demandé. Ce qui eſt évident.

67. 3°. Pour trouver une ligne droite CD qui ait tous ſes points également diſtans de deux points donnés A & B ſur le terrein,

On plantera un piquet à chacun des points A & B. On prendra enſuite un cordeau d'une longueur à volonté, qui ait un nœud coulant à chacune de ſes extrêmités. On paſſera un de ces nœuds autour du piquet A, & l'on paſſera un deuxieme piquet à l'autre extrêmité du cordeau. Enſuite, le cordeau étant bien tendu, on tracera avec le ſecond piquet, un arc ſur le terrein vers C, puis un autre vers D. On ôtera le cordeau du piquet A, on le mettra au piquet B, & avec le piquet de l'autre extrêmité, on tra- *Fig. 28.*

cera un arc vers C, puis un autre vers D, qui coupent les deux premiers arcs en C & en D. On enfoncera après cela un piquet en C, puis un autre en D, par le moyen desquels on tracera avec le cordeau, la ligne CD qui aura tous ses points également distans de A & de B. Cette ligne pourra être prolongée autant qu'on le voudra, en plantant de part & d'autre de nouveaux piquets dans l'alignement des deux premiers C & D.

Il est clair que tous les autres problêmes de cet article qu'on a résolus sur le papier, n'auront aucune difficulté sur le terrein, après le détail qu'on vient de donner sur les trois premiers.

IV.

De l'Angle.

68. L'ANGLE est l'ouverture ou l'écartement de deux lignes quelconques, comme AB & BC, qui se rencontrent dans un point B.

Fig. 29. 69. Les lignes AB, BC se nomment les côtés de l'angle, & le point B de leur rencontre, sa *pointe* ou son *sommet.*

70. Il faut obſerver que l'angle ſe marque ou s'exprime par trois lettres, dont celle du milieu, ou qui s'exprime la ſeconde, eſt au ſommet. Ainſi on écrit & on prononce, l'angle ABC, ou CBA.

71. Cette obſervation eſt abſolument néceſſaire pour diſtinguer les angles, lorſqu'il y en a pluſieurs qui ont le même point pour ſommet; mais lorſque le ſommet n'appartient qu'à un ſeul angle, on peut, pour abréger, l'exprimer ou le déſigner par la ſeule lettre de ſon ſommet. On déſigne encore quelquefois les angles par une petite lettre écrite dans l'angle proche le ſommet.

72. *Le plus ou moins de longueur des côtés de l'angle n'augmente ni ne diminue ſa grandeur.*

Car ſuivant la définition de l'angle, il conſiſte dans l'ouverture de deux lignes qui ſe rencontrent dans un point. Or, que ces lignes ſoient prolongées tant que l'on voudra du côté oppoſé au ſommet, ou qu'elles ſoient diminuées, l'ouverture au ſommet reſtera toujours la même. Donc, la longueur ou la petiteſſe des côtés d'un angle ne fait aucune choſe à ſa grandeur.

Des différentes especes d'angles.

73. Les lignes qui par leur rencontre forment un angle, peuvent être ou toutes les deux droites, ou toutes les deux courbes, ou l'une droite & l'autre courbe.

74. Tout angle, comme ABC, formé de deux lignes droites AB, BC, se
Fig. 29 nomme *rectiligne*. Celui qui est formé de
30 & 31. deux lignes courbes, comme DEF, se nomme *curviligne* : & celui qui est formé d'une ligne droite & d'une ligne courbe, comme l'angle GHI, se nomme *mixtiligne*.

REMARQUE.

75. Lorsque dans la suite de cet Ouvrage, on parlera d'angles, on sous-entendra toujours des angles rectilignes, à moins qu'on ne les désigne autrement.

Fig. 32. 76. *La mesure d'un angle* ABC, est un arc DE décrit entre ses côtés, de son sommet pris pour centre, & d'un intervalle pris à volonté.

Ainsi la valeur ou la grandeur de l'angle s'énonce ou s'exprime par le nombre

des dégrés & des minutes que contient l'arc qui lui ſert de meſure.

REMARQUE.

77. Il eſt indifférent de quel intervalle de compas on décrive l'arc qui ſert de meſure à l'angle ; car ſi l'on conſidere le ſommet de l'angle comme le centre de pluſieurs circonférences concentriques, on verra que les arcs de ces différentes circonférences compris entre les deux côtés de l'angle, ont la même quantité de dégrés *. Donc il eſt également meſuré par l'arc qui eſt le plus près du ſommet, de même que par celui qui en eſt le plus éloigné, puiſque ces deux arcs n'ont pas plus de dégrés l'un que l'autre ; ils ne different donc entr'eux que par l'étendue du dégré, qui eſt plus grand dans le grand arc que dans le petit. *Fig. 33.* *N. 54.*

78. La meſure ou la valeur de l'angle lui fait donner différens noms, ſuivant qu'elle ſe trouve, du quart de la circonférence, c'eſt-à-dire, de 90 dégrés, ou d'une quantité de dégrés au deſſous ou au deſſus de ce nombre.

79. On appelle *angle droit*, tout angle comme ABC qui a pour meſure le *Fig. 34.*

quart de la circonférence, ou 90 dégrés.

Fig. 35. 80. *L'angle aigu*, comme DEF, eſt celui qui a pour meſure un arc moindre que 90 dégrés.

Fig. 36. 81. Et l'*angle obtus* eſt celui qui a pour meſure un arc plus grand que 90 dégrés, comme l'angle GHI.

82. Il ſuit de ce que l'on vient de dire, qu'il n'y a que l'angle droit dont la meſure ſoit déterminée, car elle eſt toujours de 90 dégrés; à l'égard de l'angle aigus & de l'obtus, leur meſure varie; enſorte que tout angle qui n'a pas 90 dégrés, eſt aigu, & tout angle qui en a davantage, eſt obtus.

REMARQUES.

I.

83. L'angle obtus peut augmenter, jusqu'à ce que ſes deux côtés ne faſſent qu'une ſeule ligne droite; alors il a pour meſure la demi-circonférence : mais comme il n'y a plus d'ouverture entre ſes côtés, l'angle diſparoît : c'eſt pourquoi on peut dire que l'angle de 180 dégrés eſt une ligne droite.

II.

II.

84. L'angle droit ayant pour meſure le quart de la circonférence, il s'enſuit que la circonférence entiere contient la meſure de quatre angles droits, & ſa moitié celle de deux droits; enſorte que dire que des angles ont pour meſure toute la demi-circonférence, ou dire qu'ils ſont égaux à deux angles droits, ſont des expreſſions ſynonymes, ou qui ſignifient abſolument la même choſe. Il eſt évident que les côtés qui terminent de part & d'autre des angles qui valent deux droits, font enſemble une ligne droite.

85. On appelle le *complément* d'un angle aigu DBC, un autre angle aigu ABD, qui étant ajouté au premier, le rend égal à un droit. Ainſi le complément d'un angle n'eſt autre choſe qu'un autre angle égal à la quantité dont le premier differe de l'angle droit, ou de 90 degrés. *Fig. 37.*

86. Et on appelle *ſupplément* d'un angle obtus FEG, un angle aigu FEH, qui lui étant ajouté, rend l'obtus égal à deux angles droits; enſorte que le ſupplément d'un angle, n'eſt autre choſe *Fig. 38.*

que la quantité, dont le premier qu'on ſuppoſe obtus, differe de la demi-circonférence, ou de 180 degrés.

THEORÊME I.

87. *Les angles qui ont des complémens ou des ſupplémens égaux, ſont égaux.*

Cette propoſition eſt évidente : car les angles qui ont des complémens égaux different également de 90 degrés : donc ils ſont égaux ; & ceux qui ont des ſupplémens égaux, different auſſi également de 180 degrés : donc ils ſont pareillement égaux.

THEORÊME II.

88. *Les angles qui ont pour meſure des arcs égaux, ſont égaux.*

Cette propoſition n'a pas beſoin de démonſtration.

THEORÊME III.

Fig. 39. 89. *Si l'on prend un point C ſur une ligne droite A B, duquel on tire pluſieurs lignes vers le même côté, comme*

CD, CE, &c. tous les angles qu'elles feront avec la ligne AB, feront, pris ensemble, égaux à deux angles droits.

DEMONSTRATION.

Soit du point C pris pour centre, & d'un intervalle à volonté, décrit un arc qui soit terminé par la ligne AB, de part & d'autre du point C. Cet arc sera une demi-circonférence *, & il mesurera tous les angles ACD, DCE, ECF, FCB, qui ont leur sommet au point C; car chacun a pour mesure la partie de cet arc comprise entre ses côtés *. Or, toutes ces parties valent la demi-circonférence, ou deux angles droits. Donc tous les angles qu'elles mesurent, valent aussi, pris ensemble, deux angles droits ou 180 degrés.

* *N.* 55.

* *N.* 75.

Les angles ainsi formés sur une même ligne droite, dont le sommet est au même point, & qui ont leurs côtés au dessus ou au dessous de la ligne sur laquelle est leur sommet commun, sont appellés *angles de suite.* Suivant ce que l'on vient de démontrer, la propriété de ces angles est *d'être égaux à deux droits.*

REMARQUE.

90. Il eſt évident que ſi on prolonge
Fig. 40. au-delà du point C tous les côtés des angles de ſuite, on aura de l'autre côté de la ligne AB, de nouveaux angles de ſuite, ACF, FCG, GCB égaux auſſi à deux droits. D'où il ſuit que lorſque pluſieurs lignes ſe coupent, ou qu'elles paſſent par le même point, tous les angles qu'elles font entr'elles, ſont égaux à quatre angles droits; ce qui ſe prouve d'ailleurs en conſidérant qu'ils ont pour meſure toute la circonférence entiere. Ainſi tous les angles qu'on peut faire autour d'un même point qui leur ſert de ſommet, ne peuvent ſurpaſſer la valeur de quatre droits.

THEORÊME IV.

91. *Lorſque deux lignes droites ſe coupent, les angles qui ſe trouvent opposés par la pointe ou par le ſommet, ſont égaux entr'eux.*

Fig. 41. Soient les deux lignes AB, CD, qui ſe coupent dans le point E, les angles CEB, AED qui ont leurs côtés diſpoſés de maniere qu'on peut conſi-

dérer le ſecond comme formé par le prolongement des côtés du premier au-delà du ſommet, & ceux du premier par le prolongement de ceux du ſecond auſſi au-delà du ſommet, ſont appellés *opposés au ſommet*, de même que les angles A E C & D E B. Il faut prouver que ces angles, comparés deux à deux, ſont égaux entr'eux.

DEMONSTRATION.

Du point E pris pour centre, & d'un intervalle à volonté, décrivez un arc D A C B, & conſidérez que ſa partie D A C eſt une demi-circonférence * de même que A C B : donc ces deux parties ſont égales. Si on retranche de chacune l'arc A C qui appartient à l'une & à l'autre, on les diminuera de la même quantité. Donc, les reſtes A D & C B ſeront égaux. Mais ces reſtes meſurent les angles oppoſés au ſommet A E D, C E B : donc ces angles ſont égaux. C. q. f. d. (1) * *N* 53.

On démontrera de la même maniere que les deux autres angles oppoſés au

(1) Ces quatre lettres ſignifient *ce qu'il falloit démontrer*. On s'en ſert ordinairement pour abréger cette expreſſion.

ſommet AEC & DEB, ſont auſſi égaux entr'eux.

PROBLEME.

I.

Fig. 42. 92. *Sur une ligne donnée AB, faire un angle égal à un angle donné KEL.*

Du ſommet E de l'angle donné, pris pour centre, & d'un intervalle à volonté, décrivez un arc GH entre ſes côtés. & Enſuite du point A pris pour centre, & du même intervalle, décrivez un arc indéfini CD, ſur lequel prenez l'arc CD, égal à l'arc GH, & par le point D & le point A, tirez AD, prolongée à volonté au-delà du point D. L'angle DAC ſera égal au propoſé KEL: ce qui eſt évident, puiſque par la conſtruction les arcs qui les meſurent ſont égaux.

REMARQUE.

93. On obſervera ici, que lorſqu'on dit de prendre la grandeur d'un arc, on entend de prendre ſeulement la grandeur de ſa corde, qui eſt une ligne droite, laquelle ſe prend en ouvrant le compas d'une extrêmité de l'arc à l'au-

tre ; car l'arc, qui eſt une ligne courbe, ne peut ſe prendre avec le compas : mais comme les arcs égaux ont des cordes égales, & que réciproquement les cordes égales ſoutiennent des arcs égaux dans le même cercle, ou dans des cercles égaux *, il en réſulte que, prenant la corde d'un arc, c'eſt la même choſe que ſi on prenoit la grandeur ou la meſure abſolue de l'arc. Ainſi dans la ſuite, lorſqu'on parlera de prendre la grandeur d'un arc, on entendra toujours qu'il faut prendre cette grandeur par celle de ſa corde. *N. 50.

II.

94. *Couper un angle ABC en deux parties égales.* Fig. 43.

Du ſommet de l'angle donné B pris pour centre, décrivez un arc EF entre les côtés de l'angle, qui en ſera la meſure. Enſuite des points E & F pris pour centre, & d'un intervalle pris à volonté, décrivez deux arcs qui ſe coupent dans un point D ; tirez du point D au ſommet B, la ligne droite DB, elle coupera l'arc EF en deux également en G, & par conſéquent l'angle donné ABC.

Pour le démontrer, conſiderez que le point B, centre de l'arc EGF, eſt également diſtant des points E & F de cet arc, & que par la conſtruction, le point D eſt également diſtant des deux mêmes points. Donc la ligne BD a tous ſes points également diſtans de E & de F * : donc elle coupe l'arc EF en deux parties égales.

* N. 19.

III.

Fig. 44. 95. *Sur une ligne donnée EC faire un angle d'un certain nombre de degrés, comme par exemple de 40.*

Pour réſoudre ce problême, il faut ſe ſervir de l'inſtrument X appellé *Rapporteur*. C'eſt un demi-cercle d'argent, de cuivre ou de corne, diviſé en degrés & demi-degrés, lorſqu'il eſt aſſez grand pour que le demi-degré ſoit ſenſible.

Pour faire un angle de 40 degrés, ou de tout autre nombre avec cet inſtrument, il faut porter ſon diametre DE ſur la ligne donnée CE, enſorte que ſon centre C ſoit exactement ſur le point C où doit être le ſommet de l'angle; après quoi il faut compter ſur la circon-

férence du rapporteur 40 degrés en commençant par l'extrêmité E du diametre DE qui touche la ligne EC : on suppose que le 4[e] degré se trouve en G, on marquera un point en G ; & l'instrument étant levé, on tirera une ligne par C & par G, & l'on aura l'angle ECG de la quantité demandée.

I V.

96. *Trouver le nombre des degrés d'un angle donné.*

On le trouvera en posant le centre du rapporteur au sommet de l'angle donné, & observant que le diametre soit exactement sur l'un des côtés de l'angle ; alors la partie de la circonférence du rapporteur comprise entre les deux côtés de l'angle, donnera le nombre de ses degrés. Ce qui est évident.

V.

97. *Mesurer un angle ABC sur le terrein.* Fig. 45.

On se sert communément pour cette opération d'un demi-cercle de cuivre GID divisé en degrés, demi-degrés,

& quelquefois en minutes, ſuivant la grandeur de l'inſtrument, qu'on nomme indifféremment *demi-cercle*, ou *graphometre*.

98. Il eſt élevé ſur un pied L, ſur lequel il peut ſe mouvoir de tout ſens à l'aide d'un genou K, dont la tige entre dans la partie ſupérieure du pied L qui a trois branches, qui s'étendent ou ſe reſſerrent à volonté, ſuivant la nature du terrein, pour placer l'inſtrument dans une ſituation fixe. Aux extrêmités G & D du diametre, il y a deux petites plaques de cuivre élevées ſur ce diametre, percées dans le milieu ; enſorte que le rayon viſuel qui paſſe par ces ouvertures, paſſe en même temps par le centre de l'inſtrument. Ces plaques ainſi percées, ſont appellées *pinnules*. L'inſtrument a ſur le centre une regle mobile HI, égale au diametre, aux extrêmités de laquelle il y a auſſi deux pinnules H & I percées comme les précédentes, c'eſt-à-dire que le rayon viſuel qui paſſe par leur ouverture, paſſe en même temps par le centre de l'inſtrument. Cette regle ſe nomme *alidade*.

Lorſque les points qui terminent les côtés des angles qu'on veut meſurer, ſont fort éloignés de leur ſommet, on ſe ſert

d'un demi-cercle, dont le diametre eſt couvert d'une lunette, qui a auſſi pour alidade une autre lunette. A chaque extrêmité de ces lunettes, il y a deux fils qui paſſent par le centre du verre de la lunette, en faiſant enſemble des angles droits. Le point de leur ſection tient lieu de l'ouverture de la pinnule. Les opérations ſont plus exactes avec le graphometre à lunette; mais le ſimple à pinnules eſt ſuffiſant pour les opérations qui n'embraſſent pas une grande étendue de terrein.

Après cette deſcription abrégée du graphometre, paſſons à ſon uſage. *Fig. 45.*

99. Pour meſurer l'angle ABC avec cet inſtrument, on fera planter un piquet ou un *jalon*, qui eſt un long bâton de cinq ou ſix pieds, dans un point C de la ligne BC, & un autre jalon dans un point A de la ligne AB.

100. Enſuite l'inſtrument étant ſur ſon pied L, on le placera en B, de maniere que ſon centre réponde parfaitement au point B : pour cela on attache un fil avec un plomb au pied L; ce fil eſt d'une longueur à laiſſer tomber le plomb qui lui eſt attaché à peu de diſtance du terrein; enſorte qu'on puiſſe voir exactement quand il répond au

point B du terrein où est le sommet de l'angle qu'on veut mesurer.

101. Après cela, il faut placer l'instrument dans une situation sensiblement horizontale, c'est-à-dire qu'il ne soit pas plus incliné d'un côté que d'un autre sur le terrein ; puis il faut le tourner sur son genou, jusqu'à ce qu'en regardant par les pinnules G & D, on apperçoive le jalon C. Cela fait, l'instrument restant dans la même position, il faut faire mouvoir la regle HI, jusqu'à ce qu'en regardant par les pinnules on apperçoive le piquet ou jalon planté en A : alors le nombre des degrés de l'instrument compris entre les pinnules D & I, donne la valeur de l'angle ABC : ce qui est évident.

REMARQUE.

102. Il faut prendre garde en faisant mouvoir la regle mobile HI, de déranger le diametre GD, de sa direction GC. Pour cela, après avoir mis HI dans l'alignement de A, il faut voir si GD est encore dans l'alignement de C : s'il y avoit du dérangement, il faudroit replacer GD dans la situation convenable, & rectifier ou replacer ensuite HI dans la direction de A.

V I.

103. *Faire un angle sur le terrein d'une quantité de degrés demandé, comme de 40 degrés.*

Ce problême n'a aucune difficulté avec le demi-cercle, dont on vient de faire usage dans le problême précédent. Car il est évident qu'ayant placé l'instrument au point où l'on veut que soit le sommet de l'angle demandé, il ne faut que faire planter un jalon dans la direction des deux pinnules fixes G & D, & mettre la regle mobile; ensorte que le milieu de ses pinnules réponde au 40e degré de l'instrument; après quoi faisant planter un jalon dans la direction de ces pinnules, & mettant aussi un piquet ou un jalon au point qui répond au centre de l'instrument, on aura sur le terrein l'angle demandé.

Remarque.

104. Au défaut du graphometre, on peut résoudre les deux problêmes précédens avec un instrument incomparablement plus simple, & qu'on peut trouver aisément partout. Il s'agit d'une

petite planche de ſix ou huit pouces de long ſur autant de large, ſoutenue par un pied quelconque dans une ſituation horizontale, comme le graphometre.

Fig. 46. 105. On attache avec de la cire une feuille de papier ſur cette planche, & au lieu de pinnules on ſe ſert d'épingles. On met une épingle A, pour marquer le ſommet de l'angle qu'on veut meſurer, & enſuite on en met une autre B, & une troiſieme C dans la direction de chaque côté de cet angle; il eſt clair que tirant enſuite des lignes de A en B, & de A en C, on aura l'angle CAB, ſur le papier collé ſur la planche, qui ſera le même que celui du terrein. On en pourra connoître la valeur en le meſurant avec le rapporteur.

Il eſt aiſé de voir qu'un pareil inſtrument n'eſt ni d'une grande dépenſe, ni d'une grande difficulté à avoir. Il ſe nomme *planchette*. Il y a des planchettes plus compoſées avec des pinnules, &c. mais comme elles reviennent alors aſſez au demi-cercle, on n'en parlera pas ici. Celle qu'on vient de décrire eſt la plus ſimple & la moins coûteuſe.

V.

Des Lignes perpendiculaires, & des Obliques.

106. UNE *ligne perpendiculaire* eſt une ligne droite comme CD, qui, rencontrant une autre ligne droite AB, fait de part & d'autre des angles droits avec elle; ou, ce qui eſt la même choſe, qui, en la rencontrant, ne penche pas plus d'un côté que d'un autre. *Fig. 47.*

Il ſuit delà,

107. 1°. *Qu'une ligne CD perpendiculaire à une autre ligne AB, étant prolongée au-delà du point D vers E, ſon prolongement DE ſera auſſi perpendiculaire ſur AB.*

Car les angles ADC & CDB étant droits, leurs angles de ſuite ADE, EDB le ſeront auſſi. Donc, &c. *Fig. 48.*

108. 2°. Que lorſqu'une ligne droite CD eſt perpendiculaire ſur une autre AB, cette ſeconde ligne eſt auſſi perpendiculaire à la premiere; car il eſt évident qu'elle fait auſſi des angles droits avec elle. Ainſi lorſque deux lignes ſont perpendiculaires, la premiere l'eſt ſur

la deuxieme, comme celle-ci l'est sur la premiere.

109. *Une ligne oblique*, est une ligne
Fig. 49. droite comme GH, qui rencontrant une autre ligne droite AB, fait des angles inégaux avec elle, ou qui penche plus d'un côté que d'un autre sur cette ligne.

THÉORÊME. I.

Fig. 50. 110. *D'un point quelconque C pris sur une ligne droite AB, on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire CD.*

Pour le prouver, il faut considérer que suivant la définition de la perpendiculaire, les angles DCB & DCA sont droits, & qu'ainsi, si on tire une autre ligne du point C vers D, comme CE, l'angle ECB, qui fait partie de l'angle DCB, ne peut être droit; autrement la partie seroit égale au tout, ce qui est absurde : donc la ligne CE n'est pas perpendiculaire sur AB. Or, comme on démontrera la même chose de toutes les autres lignes différentes de CD, qui passeront par le point C, il s'ensuit que par ce point, on ne peut élever qu'une seule perpendiculaire CD. C. q. f. d.

THÉORÊME II.

111. *Si deux points quelconques C & D, d'une ligne droite, ſont également éloignés de deux points F & G d'une autre ligne droite A B, la premiere ſera perpendiculaire à la ſeconde.* *Fig. 51.*

DEMONSTRATION.

La ſituation ou poſition d'une ligne droite dépend de deux points *: or, par la ſuppoſition, les deux points C & D de la ligne droite C D, ſont également éloignés des deux points F & G de la ligne A B : donc la ligne C D a tous ſes points également diſtans des deux mêmes points : donc elle ne penche ni vers F, ni vers G : donc elle eſt perpendiculaire à la ligne F G, ou A B. C. q. f. d.

* *N. 19.*

112. Il eſt évident que lorſqu'un point C ou D d'une ligne perpendiculaire C D eſt également éloigné de deux points quelconques, comme F & G, de la ligne ſur laquelle tombe la perpendiculaire, tous les autres points de cette perpendiculaire ſont également éloignés des deux mêmes points.

THEORÊME III.

Fig. 52. 113. *D'un point quelconque C, hors une ligne droite AB, on ne peut faire tomber qu'une ſeule perpendiculaire ſur cette ligne.*

Soit du point C abaiſſée la perpendiculaire CD, il faut démontrer que toute autre ligne qu'on tirera de ce point ſur AB, comme CG, ne ſera pas perpendiculaire à AB.

Pour cela, prenez deux points E & F à égale diſtance du point D, tous les points de la ligne DC ſont également
*N. 112. diſtans de ces deux points *; mais la ligne CG qui a le point C de commun avec CD, n'a pas le point G également éloigné de E & de F; car ED, par la ſuppoſition, eſt égale à DF : or EG eſt plus grand que ED; autrement la partie ſeroit égale au tout, ce qui eſt abſurde. Donc le point G n'eſt pas à égale diſtance de E de F : donc la ligne CG penche plus vers E que vers F : donc elle n'eſt pas perpendiculaire à cette ligne, ou à AB.

114. Il eſt évident qu'on peut démontrer la même choſe de toutes les autres lignes qu'on peut imaginer, tirées

de C ſur A B : donc d'un point donné hors d'une ligne droite, on ne peut faire tomber qu'une ſeule perpendiculaire ſur cette ligne. C. q. f. d.

THÉORÊME IV.

115. *Si d'un point C, hors une ligne droite A B, on abaiſſe une perpendiculaire C D, & une oblique quelconque C F, la perpendiculaire C D ſera plus courte que C E.* Fig. 53.

Pour le démontrer, prolongez la perpendiculaire C D en H; enſorte que D H ſoit égale à C D : tirez E H qui ſera égale à C E, car A B étant perpendiculaire ſur C H, & le point D étant, par la conſtruction, au milieu de C H, tous les points de B A ſeront également éloignés de C & de H *, & par conſéquent E H ſera égale à C E. * *N. 113.*

Maintenant conſiderez que C H eſt une ligne droite, tirée de C en H : donc elle eſt plus courte que la ligne courbée C E H, qui paſſe par les deux mêmes points * : donc C D moitié de la droite C H, ſera auſſi plus courte que C E moitié de la ligne courbée C E H : Donc la perpendiculaire C D eſt plus courte que l'oblique C E. * *N. 26.*

COROLLAIRE.

Il ſuit de cette propoſition :

116. Que la perpendiculaire CD, qui eſt la ligne la plus courte qu'on puiſſe tirer d'un point C hors la ligne AB, ſur cette ligne, ſert à meſurer la diſtance de ce point à la ligne AB.

PROBLEMES.

I.

Fig. 54. 117. *D'un point donné C ſur une ligne droite AB, élever une perpendiculaire ſur cette ligne.*

Prenez deux points F & G à égale diſtance du point C, & de ces deux points pris pour centre, décrivez vers le même côté d'un intervalle pris à volonté, deux arcs qui ſe coupent dans un point D, la ligne droite CD tirée par C & par D, ſera la perpendiculaire demandée.

Pour le démontrer, il faut ſe reſſouvenir que la ſituation ou poſition d'une
* N. 19. ligne droite dépend de deux points *: or par la conſtruction, la ligne CD a les points C & D à égale diſtance de F

& de G : donc tous ſes points ſont également diſtans des deux même points : donc elle eſt perpendiculaire ſur A B.

II.

118. *D'un point donné C, hors une ligne droite A B, abaiſſer une perpendiculaire ſur cette ligne.* Fig. 55.

Du point C pris pour centre, décrivez un arc E F qui coupe la ligne A B en deux points E & F ; de chacun de ces points pris pour centre, & d'un intervalle à volonté, décrivez deux arcs qui ſe coupent dans un point D, au deſſus ou au deſſous de la ligne A B : enſuite par D & par C, tirez la ligne C G, elle ſera perpendiculaire ſur A B.

On démontrera ce problême comme le précédent.

III.

119. *D'un point donné A, ſur l'extrêmité d'une ligne donnée A B, élever une perpendiculaire ſur cette ligne.* Fig. 56.

Il faut prolonger la ligne A B vers C ; prendre deux points ſur C B à égale diſtance de A, & achever enſuite l'opération comme dans le premier problême.

REMARQUE.

120. On peut encore résoudre ce problême, en faisant au point A un angle droit avec A B, par le moyen du rapporteur.

On donnera dans la suite d'autres méthodes pour élever une perpendiculaire à l'extrêmité d'une ligne, sans avoir besoin de la prolonger, & sans se servir du rapporteur.

Les problêmes qu'on vient de résoudre, peuvent se construire sur le terrein avec la même facilité que sur le papier. Pour le prouver, il suffira d'expliquer seulement la construction du premier sur le terrein.

IV.

Fig. 57. 121. *D'un point donné D sur la ligne A B, tracée sur le terrein, élever une perpendiculaire C D.*

Prenez deux points F & G à égale distance du point D, & enfoncez un piquet dans chacun de ces points : ensuite ayant un cordeau d'une longueur arbitraire qui ait un nœud à chacune de ses extrêmités, mettez un de ces nœuds

au piquet F, & un piquet à l'autre extrêmité du cordeau : tendez après cela le cordeau, & décrivez avec le piquet opposé à F, un autre arc vers C : ôtez le nœud de F, mettez-le au piquet G, & décrivez de même avec le piquet de l'autre extrêmité du cordeau, un arc qui coupe le premier en D : tirant après cela une ligne de C en D avec un cordeau ou autrement, on aura la perpendiculaire demandée.

Ce problême peut encore s'exécuter plus facilement de cette maniere.

122. Ayant mis les deux piquets F & G à égale distance du point D, il faut avoir un cordeau qui ait aussi deux nœuds coulans à ses extrêmités, & une marque distinctive au milieu. On mettra les nœuds coulans des extrêmités dans les piquets F & G : on tendra ensuite le cordeau par son point du milieu : on mettra un piquet au point du terrein qui répondra au milieu du cordeau, & la ligne qui sera tirée de ce piquet au point D, sera la perpendiculaire demandée : ce qui est évident.

123. On peut encore élever très-facilement une perpendiculaire d'un point donné sur une ligne tracée sur le terrein, en se servant du graphometre

ou demi-cercle, dont on a donné la description, n. 98.

Fig. 58. Il faut poſer cet inſtrument ſur la ligne donnée A B, de maniere que ſon centre réponde exactement au point C, duquel doit partir la perpendiculaire, & que regardant par les deux pinnules du diametre, on voie un piquet planté en A ou en B ſur la ligne A B : il faut enſuite mettre l'alidade ſur le point de 90 degrés de l'inſtrument, c'eſt-à-dire enſorte que le rayon viſuel qui paſſera par les pinnules de l'alidade faſſe un angle droit avec le diametre du demi-cercle. Alors il faut regarder par ces deux pinnules, & faire planter un piquet D dans leur alignement ; en mettre auſſi un qui réponde au centre C de l'inſtrument ; & ſi après cela on tire la ligne C D, elle ſera évidemment perpendiculaire ſur A B.

124. On peut de même d'un point D, hors une ligne A B, faire tomber une perpendiculaire ſur cette ligne avec le même demi-cercle.

Pour cela, il faut mettre d'abord l'alidade ſur le point de 90 degrés, puis s'avancer ſur la ligne A B avec le demi-cercle, de maniere que ſon diametre ſoit toujours dans la direction de la ligne A B,

AB, c'est-à-dire, qu'en regardant ou *bornoyant* par les pinnules de ce diametre, on voie les piquets placés en A & en B sur la ligne AB. On s'avancera ainsi jusqu'à ce qu'en bornoyant par les pinnules de l'alidade, on voie le point D : alors on mettra un piquet au point C de la ligne AB qui répondra au centre de l'instrument, & la ligne tirée de D en C sera la perpendiculaire demandée, tirée de C sur AB.

V I.

Des Lignes paralleles.

125. *Les lignes paralleles* sont des lignes qui, dans toute leur étendue, sont également distantes les unes des autres.

126. Il suit de cette définition, que des lignes paralleles prolongées à l'infini, ne se rencontrent point.

127. Si les deux lignes AB, CD sont paralleles, tous les points de la premiere seront également distans des points de la seconde; & comme la distance d'un point à une ligne se mesure par une perpendiculaire *, il s'ensuit que *si l'on tire des perpendiculaires EF,* *Fig. 59.*

* *N. 116.*

GH, entre ces paralleles, elles seront égales.

THEORÊME I.

128. *Si deux lignes sont paralleles, elles le seront aussi à toutes les lignes qui seront paralleles à l'une d'elles.*

Fig. 60. Cette proposition est évidente; car soient les lignes AB, CD paralleles entr'elles, & EF parallele à CD, il est clair que cette ligne ayant tous ses points également distans de AB, EF a aussi tous ses points également distans de la même ligne. Donc elle lui est parallele.

129. L'espace, comme ECDE ou ACBD, qui est entre deux paralleles CD, EF, ou AB & CD se nomme *espace parallele.*

Fig. 61. 130. Lorsque deux lignes paralleles, comme CD, EF, tombent sur une ligne droite quelconque AB, l'angle EFB hors de l'espace parallele est appellé *extérieur* par rapport à l'angle intérieur du même côté CDF ou CDB, qu'on appelle son *opposé intérieur.*

De même l'angle extérieur ADC a pour opposé intérieur l'angle AFE du même côté.

THEORÊME II.

131. *Si deux lignes paralleles CD, EF, rencontrent une ligne droite AB, l'angle extérieur sera toujours égal à son opposé intérieur.*

Il faut démontrer que l'angle CDB est égal à l'angle EFB. Or c'est ce qui est évident par la définition des paralleles; car elles doivent être partout également distantes les unes des autres* : mais si les angles CDB & EFB étoient inégaux, les lignes CD & EF seroient inégalement inclinées sur AB : ainsi elles s'approcheroient d'un côté & s'éloigneroient de l'autre. Donc alors elles ne seroient plus paralleles : donc lorsqu'elles sont paralleles, l'angle extérieur EFB est égal à son opposé intérieur CDB. C. q. f. d. * *N. 125.*

On prouvera par le même raisonnement, que l'autre angle extérieur CDA est égal à son opposé intérieur EFD ou EFA.

THEORÊME III.

132. *Si deux lignes droites CD, EF,* *Fig. 61.*

qui rencontrent une ligne A B, donnent l'angle extérieur E F B égal à son opposé intérieur C D B, elles seront paralleles.

Cette proposition se démontre de la même maniere que la précédente; en considérant que lorsque ces angles sont inégaux, les lignes C D & E F ne sont point paralleles; mais comme il est évident qu'il y a une position dans laquelle elles peuvent être paralleles, il s'ensuit que ce n'est que lorsque l'angle extérieur est égal à son opposé intérieur. Donc, &c.

THEORÊME IV.

133. *Lorsque deux lignes sont paralleles, si on éleve une perpendiculaire sur l'une de ces lignes qui rencontre la seconde, elle sera aussi perpendiculaire sur cette ligne.*

Fig. 62. Soient les deux lignes paralleles A B, C D, & soit élevé sur A B au point F la perpendiculaire F E; il faut démontrer que cette ligne est aussi perpendiculaire sur C D.

Pour cela, prolongez E F indéfiniment vers G; alors on pourra regarder les lignes D E, B F comme deux paral-

leles qui rencontrent la ligne GF. Donc l'angle extérieur GED sera égal à son opposé intérieur EFB* : mais cet intérieur est droit par la supposition : l'extérieur GED l'est donc aussi, de même que son angle de suite DEF. Donc EF fait aussi des angles droits avec CD : donc elle est perpendiculaire sur cette ligne. * N. 131

THEORÊME V.

134. *Deux, ou un plus grand nombre de perpendiculaires sur une même ligne, sont paralleles entr'elles.*

Soient les lignes CD, EF perpendiculaires à AB, je dis qu'elles sont paralleles. Fig. 63.

Car tous les angles qu'elles font avec cette ligne étant droits, l'angle extérieur EFB est égal à son opposé intérieur CDB. Donc les lignes CD & EF sont paralleles *. * N. 132.

THÉORÊME VI.

135. *Lorsque deux lignes paralleles AB, CD sont coupées par une ligne droite EF, les angles intérieurs opposés & de différens côtés de la ligne coupante,* Fig. 64.

comme A H G & H G D, de même que B H G & H G C sont appellés alternes, *& ces angles sont toujours égaux entr'eux, c'est-à-dire que A H G est égal à H G D, & B H G à H G C.*

Il est évident que, si la ligne coupante E F coupe les deux paralleles perpendiculairement, les angles alternes sont
* N. 133. égaux; car alors ils sont droits *: ainsi dans ce cas la proposition dont il s'agit, n'a pas besoin de démonstration; elle en a seulement besoin lorsque les paralleles sont coupées obliquement, comme on le suppose ici.

DEMONSTRATION.

Considérez les parties B H & D G des deux paralleles A B, C D, comme deux paralleles qui rencontrent la ligne coupante E F: alors on verra que l'angle extérieur E H B est égal à son opposé
* N. 131. intérieur E G D *: de plus le même angle extérieur est aussi égal à l'angle AHG
* N. 91. qui lui est opposé au sommet *. Donc les deux angles alternes HGD & AHG sont égaux au même angle extérieur
* N. 10. E H B : donc ils sont égaux entr'eux *.

On démontrera de la même maniere

que les deux autres angles alternes BHG & HGC sont pareillement égaux entr'eux.

COROLLAIRE.

Il suit de cette proposition,

136. *Que les deux angles intérieurs du même côté BHG & HGD, sont égaux à deux angles droits.*

Car les deux angles de suite EHB, BHG sont égaux à deux angles droits * : mais l'angle EGD est égal à EHB. Donc étant ajouté à l'angle GHB, il fera la même somme que EHB, c'est-à-dire celle de deux angles droits. * *N. 85.*

THEORÊME VII.

137. *Si deux lignes droites qui sont coupées par une troisieme ont leurs angles alternes égaux, elles sont paralleles.*

Soient les deux lignes droites AB, CD coupées par la ligne aussi droite EF, & soient les angles alternes égaux AHG & HGD, il faut démontrer que AB sera parallele à CD. *Fig. 64.*

DEMONSTRATION.

Considérez que l'angle EHB étant égal à l'angle AHG qui lui est opposé au sommet, il le sera aussi à son égal HGD. Ainsi l'angle extérieur EHB sera égal à son opposé intérieur EGD. Donc HB & GB sont paralleles. Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLEMES.

I.

Fig. 65. 138. *D'un point donné C, hors une ligne AB, mener une parallele à cette ligne.*

Mettez une pointe du compas au point donné C, & ouvrez-le ensuite jusqu'à ce que son autre pointe tombe sur un point D, de la ligne AB; puis du point C pris pour centre, & de l'intervalle CD, décrivez un arc indéfini DF. Prenez après cela le point D pour centre, & du même intervalle DC, décrivez par C l'arc CE, jusqu'à la rencontre de AB en E: faites ensuite l'arc DF égal à l'arc CE, & par le point C & le point F, tirez la ligne CF, qui sera la parallele demandée.

Pour le démontrer, il faut tirer la ligne CD, & considérer que par la construction, l'angle FCD est égal à l'angle CDB, ou CDE : or ces angles sont opposés, & de différens côtés de la ligne CD : donc ils sont alternes * : donc les lignes AB, CD sont paralleles. *N. 137.*

AUTRE RESOLUTION.

139. Du point C faites tomber la perpendiculaire CD sur AB, & d'un point E pris sur AB à une distance DE prise à volonté du point D, élevez sur AB, EF perpendiculaire & égal à CD ; par C & par F, tirez la ligne FC, elle sera parallele à AB : ce qui est évident, puisque les perpendiculaires CD, FE, entre ces lignes, sont égales *. *Fig. 66.* *N. 127.*

II.

140. *D'un point donné C sur le terrein, mener une ligne parallele à une ligne AB, aussi tracée sur le terrein.*

Faites sur le terrein la même opération qu'on vient d'expliquer * pour mener une parallele par un point donné C à une ligne AB donnée sur le papier. *Fig. 66.* *N. 139.*

REMARQUE.

141. Le tracé d'un *Camp*, c'eſt-à-dire de l'établiſſement à demeure d'une armée en campagne, ne conſiſte que dans celui des paralleles & des perpendiculaires ſur le terrein : c'eſt pourquoi ceux qui ſe ſeront rendu ces opérations familieres, ne trouveront aucune difficulté à marquer un camp, lorſque les proportions qu'on doit y obſerver leur ſeront connues. C'eſt ce qu'on peut voir dans la *Caſtramétation* ou *la Meſure & le Tracé des Camps*, qu'on a donné au Public.

III.

Fig. 67. 142. *Diviſer une ligne droite A B en tant de parties égales qu'on voudra, par exemple en 5.*

Il faut tirer la ligne A C qui faſſe avec A B un angle C A B de telle grandeur qu'on voudra, & porter ſur A C, à commencer du point A, une ouverture de compas A 1, priſe auſſi à volonté autant de fois que A B doit avoir de parties égales, c'eſt-à-dire dans cet exemple, cinq fois de A en 5. Par le point 5 & le point B, tirez la ligne

5 B : menez ensuite B D qui fasse avec A B l'angle A B D égal à C A B : faites après cela B E égal à A 5, & portez A 1 cinq fois sur cette ligne de B en E; tirez ensuite les lignes 4, 1; 3, 2; 2, 3; & 1, 4; elles partageront ou diviseront la ligne A B en cinq parties égales.

I V.

143. *Résoudre le même problême avec le compas de proportion.*

Le compas de proportion est un instrument composé de deux regles d'argent ou de cuivre, jointes ensemble par un clou & une charniere, travaillées de maniere qu'elles peuvent tourner autour du clou comme autour d'un centre.

Entre les différentes lignes qu'on trouve sur cet instrument, qui a un grand nombre d'usages, il y en a deux A C, A D, le long desquelles est écrit *les parties égales*. Chacune est divisée en 100, 120, ou 200 parties égales, suivant la grandeur de l'instrument. *Fig. 68.*

Pour diviser une ligne droite, comme G H, en plusieurs parties égales; par exemple en 5, on prendra, avec le compas ordinaire, la longueur de la ligne

G H, & ce compas reſtant ouvert de cet intervalle, on poſera une de ſes pointes ſur un des nombres de la ligne des parties égales qui puiſſe ſe diviſer exactement en cinq, comme 50, 100, 120, ou 200; on prend dans cet exemple le nombre 200 qui eſt en G. On ouvrira enſuite le compas de proportion, de maniere que l'autre pointe du compas ordinaire tombe ſur l'autre regle du compas de proportion, & ſur le même nombre de la ligne des parties égales, c'eſt-à-dire ſur 200 en D, parce que la premiere pointe du compas ordinaire a été poſée ſur 200. Cela fait, le compas de proportion reſtant ainſi ouvert, il faut chercher quelle eſt la cinquieme partie du nombre qu'on a pris ſur la ligne des parties égales, ou quelle eſt la cinquieme partie de 200. On trouvera que cette cinquieme partie eſt 40. On prendra, avec le compas ordinaire, l'intervalle de 40 à 40 ſur les lignes des parties égales des deux côtés du compas de proportion; ce ſera la cinquieme partie de la ligne propoſée G H; enſorte que, ſi on la porte cinq fois ſur cette ligne, elle la diviſera en cinq parties égales.

Si on avoit voulu diviſer la ligne G H

en sept parties égales, il auroit fallu prendre sur une des lignes des parties égales un nombre qui eût pu être divisé en sept parties égales, comme 70, ou 140, & ouvrir ensuite l'instrument, de maniere que l'intervalle de 70 à 70, ou de 140 à 140, entre les deux lignes des parties égales, fût égal à la ligne GH; aprés quoi l'intervalle de la septieme partie de 70 ou de 140, prise entre les deux lignes des parties égales des deux branches AC & AD du compas de proportion, auroit donné la septieme partie de la ligne proposée GH.

Si la ligne proposée se trouve trop grande pour pouvoir être prise avec le compas ordinaire, & portée ensuite sur le compas de proportion, il faudra la partager en plusieurs parties à volonté, & prendre la cinquieme partie de chacune, si on veut la diviser en cinq parties; la septieme, si on veut la diviser en sept parties, &c. il est clair que la somme de toutes les cinquiemes ou septiemes parties des lignes dans lesquelles on a d'abord partagé la ligne donnée, donnera la cinquieme ou la septieme partie de cette même ligne.

On trouvera la démonstration de cet usage & du problême qui le précéde dans

GH, & ce compas restant ouvert de cet intervalle, on posera une de ses pointes sur un des nombres de la ligne des parties égales qui puisse se diviser exactement en cinq, comme 50, 100, 120, ou 200; on prend dans cet exemple le nombre 200 qui est en C. On ouvrira ensuite le compas de proportion, de maniere que l'autre pointe du compas ordinaire tombe sur l'autre regle du compas de proportion, & sur le même nombre de la ligne des parties égales, c'est-à-dire sur 200 en D, parce que la premiere pointe du compas ordinaire a été posée sur 200. Cela fait, le compas de proportion restant ainsi ouvert, il faut chercher quelle est la cinquieme partie du nombre qu'on a pris sur la ligne des parties égales, ou quelle est la cinquieme partie de 200. On trouvera que cette cinquieme partie est 40. On prendra, avec le compas ordinaire, l'intervalle de 40 à 40 sur les lignes des parties égales des deux côtés du compas de proportion; ce sera la cinquieme partie de la ligne proposée GH; ensorte que, si on la porte cinq fois sur cette ligne, elle la divisera en cinq parties égales.

Si on avoit voulu diviser la ligne GH

en ſept parties égales, il auroit fallu prendre ſur une des lignes des parties égales un nombre qui eût pu être diviſé en ſept parties égales, comme 70, ou 140, & ouvrir enſuite l'inſtrument, de maniere que l'intervalle de 70 à 70, ou de 140 à 140, entre les deux lignes des parties égales, fût égal à la ligne GH; après quoi l'intervalle de la ſeptieme partie de 70 ou de 140, priſe entre les deux lignes des parties égales des deux branches AC & AD du compas de proportion, auroit donné la ſeptieme partie de la ligne propoſée GH.

Si la ligne propoſée ſe trouve trop grande pour pouvoir être priſe avec le compas ordinaire, & portée enſuite ſur le compas de proportion, il faudra la partager en pluſieurs parties à volonté, & prendre la cinquieme partie de chacune, ſi on veut la diviſer en cinq parties; la ſeptieme, ſi on veut la diviſer en ſept parties, &c. il eſt clair que la ſomme de toutes les cinquiemes ou ſeptiemes parties des lignes dans leſquelles on a d'abord partagé la ligne donnée, donnera la cinquieme ou la ſeptieme partie de cette même ligne.

On trouvera la démonſtration de cet uſage & du problême qui le précéde dans

le ſecond volume de *l'Arithmétique* & *la Géométrie de l'Officier.*

VII.

Des Tangentes, ou des Lignes qui touchent le cercle, & des lignes tirées dans le cercle.

Fig. 69. 144. LES lignes, comme AB, qui touchent le cercle ſans le couper, ſe nomment *Tangentes.*

La circonférence du cercle, & en général toutes les autres lignes courbes peuvent être conçues comme compoſées d'une infinité de lignes droites infiniment petites, qui font enſemble des angles qui different de 180 degrés d'une quantité auſſi infiniment petite. Dans cette ſuppoſition, la tangente eſt le prolongement d'une de ces petites lignes; autrement ſi on conçoit la courbe comme compoſée de points, la tangente eſt une ligne qui paſſe par un de ces points.

145. Il ſuit delà que la tangente ne touche le cercle que dans la partie infiniment petite de la circonférence dont elle eſt le prolongement, ou, ce qui eſt,

la même chose, dans un point de cette circonférence.

THEORÊME I.

146. *Si l'on mene une perpendiculaire A B à l'extrêmité d'un rayon A C, elle ne touchera la circonférence du cercle X que dans le seul point A, c'est-à-dire, qu'elle sera tangente au cercle.* *Fig. 69.*

Pour le démontrer, considérez que le rayon CA étant perpendiculaire sur AB, est la ligne la plus courte qu'on puisse tirer de C sur A B * : or si on tire une autre ligne comme C D du point C à un point quelconque D de la ligne A B, elle sera plus grande que le rayon C A étant oblique à A B. Donc le point D sera hors du cercle ; & comme on démontrera la même chose de tous les autres points de la ligne A B, il s'ensuit qu'il ne touche le cercle que dans le seul point A, c'est-à-dire qu'elle est tangente. C. q. f. d.

* *N. 115.*

COROLLAIRE.

147. Il suit de cette proposition que la tangente est perpendiculaire au rayon, & qu'ainsi, si du point A, où elle touche

la circonférence du cercle X, on tire le rayon CA, il sera perpendiculaire sur la tangente, ou qu'il fera un angle droit avec elle.

THEORÊME II.

148. *Si du point A où une tangente touche le cercle, on éleve une perpendiculaire, elle passera par le centre C du cercle.*

Fig. 70. Pour le démontrer, considérez que par le corollaire précédent, la ligne tirée de C au point touchant A, est perpendiculaire sur AB : or, si de A on pouvoit tirer une autre perpendiculaire, comme AE, qui ne passât pas par le centre C du cercle, il s'ensuivroit que du même point on pourroit élever deux
N. 110. perpendiculaires sur AB : mais on a vu* que cela étoit impossible. Donc la perpendiculaire AC, élevée du point touchant A de la tangente, passe par le centre C du cercle. C. q. f. d.

THEORÊME III.

Fig. 71. 149. *Si un diametre EF coupe une corde AB perpendiculairement en M, il la coupera en deux également, de même*

que les deux arcs que soutient la corde A B.

Pour le démontrer, considérez que le point C, centre du cercle, est à égale distance des extrêmités A & B de la corde A B, & que comme le diametre E F coupe la corde perpendiculairement, tous ses autres points sont également distans de A & de B *. Donc le point M dans lequel il coupe AB, est au milieu de cette ligne : donc les points E & F sont aussi également distans de A & de B : donc les arcs A E B & A F B sont coupés en deux également en E & en F. C. q. f. d.

* *N.* 113.

REMARQUE.

150. Il est évident que, si au lieu d'un diametre, on tire du centre une perpendiculaire sur une corde, elle coupera cette corde en deux également, de même que l'arc qu'elle soutient.

La démonstration est la même que celle du précédent Théorême.

THEORÊME IV.

151. *Si un diametre E F coupe une corde A B en deux également en M, il la coupera perpendiculairement, & il*

coupera aussi en deux également les arcs que soutient cette corde.

Cette proposition est la converse de la précédente. Elle se démontre, en considérant que le point C, centre du cercle, est également distant de A & de B, & que par la supposition, le point M est aussi également distant de A & de B; d'où il suit * que la ligne EF a tous ses points également éloignés de A & de B; qu'ainsi elle est perpendiculaire à AB, & qu'elle coupe en deux parties égales les deux arcs dont cette ligne est la corde. C. q. f. d.

* *N. 112.*

THEORÊME V.

Fig. 72. 152. *Si deux cordes AB, & DE dans un cercle, sont également éloignées du centre C de ce cercle, elles sont égales; & si elles sont égales, elles sont également éloignées du centre.*

Soient dans le cercle X, les cordes AB & DE également éloignées du centre C de ce cercle, il faut démontrer qu'elles sont égales.

Soient tirées du centre C sur les cordes AB & DE, les perpendiculaires CF & CG qui seront égales par la supposition,

& de même les rayons C B & C D, ces perpendiculaires couperont A B & D E en deux parties égales *. Cela fait, imaginez que le cercle X ſoit ployé de maniere que C F tombe ſur C G, enſorte que F ſoit ſur F, alors F B tombera ſur G D, à cauſe des angles droits C G D, C F B: mais les points B & D étant également diſtans de C, tomberont l'un ſur l'autre en D. Donc G D ſera égal à F B *: donc, puiſque les moitiés de ces cordes ſont égales, les cordes le ſont auſſi: donc les cordes également éloignées du centre, ſont égales. C. q. f. d. *N. 150. *Ibid.

On démontrera de la même maniere la ſeconde partie de la propoſition, laquelle ſeconde propoſition eſt la converſe de la premiere.

On démontrera auſſi pareillement la propoſition ſuivante; ſçavoir,

153. *Que dans un cercle, ou dans des cercles égaux, la plus grande corde eſt la plus proche du centre, & que réciproquement la corde la plus proche du centre eſt la plus grande.*



VIII.

Des angles, dont le sommet est à la circonférence du cercle.

154. On a vu que la mesure de l'angle est l'arc décrit entre les côtés de son
* N. 76. sommet pris pour centre * : alors le sommet de l'angle est au centre de l'arc par lequel il est mesuré : mais lorsque les angles ont leur sommet placé sur la circonférence du cercle, il s'agit de les mesurer par le moyen de l'arc de cette circonférence, intercepté entre les côtés de l'angle ; c'est l'objet de cet article.

155. Les angles qui ont leur sommet à la circonférence d'un cercle, peuvent être formés d'une tangente & d'une
Fig. 73. corde comme l'angle A B C, ou de deux cordes, comme C B D. Nous allons d'abord déterminer quelle est la mesure du premier, & nous en déduirons celle du second.

THEORÊME I.

156. *Tout angle, comme A B C, formé d'une tangente A B, & d'une corde B C, a pour mesure la moitié de l'arc B F C que soutient cette corde.*

DEMONSTRATION.

Du centre D, tirez au point touchant B, le rayon B D qui fera un angle droit avec B A * & D E perpendiculaire sur B C, qui coupera cette corde en deux également en E *, & l'arc B F C aussi en deux également en F, étant prolongée jusqu'à cet arc; ainsi B F en sera la moitié. Par D menez encore G D H parallele à B C. *Fig. 74.* * *N. 147.* * *N. 150.*

Cette préparation étant faite, considérez que l'angle BDF, qui a son sommet en D, a pour mesure l'arc B F, compris entre ses côtés *; & que, comme l'objet de cette proposition est de faire voir que l'angle A B C a aussi pour mesure ce même arc B F, il faut démontrer que cet angle est égal à B D F. *N. 76.*

Pour cela, remarquez que l'angle G D F est droit * de même que D B A; qu'à cause des paralleles G H & B C les angles G D B & D B E sont égaux étant alternes *: d'où il suit, que si des deux angles droits G D F & D B A, on retranche les angles égaux G D B & D B E, il restera du premier l'angle B D F égal à l'angle A B E ou A B C du second *. Donc l'angle formé d'une tangente & * *N. 134.* * *N. 135.* * *N. 8.*

d'une corde, a pour mesure la moitié de l'arc que soutient la corde. C. q. f. d.

THEORÊME II.

157. *Tout angle, comme ABC, qui a son sommet à la circonférence du cercle, & qui est formé par deux cordes quelconques BA & BC, a pour mesure la moitié de l'arc AC, compris entre ses côtés, ou sur lequel il s'appuie.*

DEMONSTRATION.

Fig. 75. Soit DE une tangente qui passe par le sommet B de l'angle ABC, on aura les trois angles de suite EBC, CBA,
** N. 89.* & DBA égaux à deux angles droits *, c'est-à-dire, qu'ils auront pour mesure la moitié de la circonférence entiere. Mais par la proposition précédente, les angles EBC, DBA ont chacun pour mesure la moitié des arcs BGC & BFA. Or, ces deux arcs étant retranchés de la circonférence entiere, il ne reste plus que l'arc AHC: l'angle ABC doit donc en avoir la moitié pour mesure: mais cet arc est celui sur lequel il s'appuie. Donc l'angle qui a son sommet à la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc sur lequel il s'appuie. C. q. f. d.

COROLLAIRES.

I.

158. Il suit delà, *qu'un angle dont le sommet est au centre, comme BCD, est double de celui qui a son sommet à la circonférence, comme BAD, & qui s'appuie sur le même arc BD.* Fig. 76.

Car le premier a pour mesure l'arc entier BD, & l'autre n'en a que la moitié.

II.

159. *Que les angles, comme ABC, ADC qui ont leur sommet B & D à la circonférence du cercle, & qui s'appuient sur le même arc AC, ou sur des arcs égaux, sont égaux.* Fig. 77.

Car ils ont chacun pour mesure la moitié du même arc AC.

III.

160. *Qu'un angle ABC qui a son sommet B à la circonférence du cercle, & qui s'appuie sur un diametre AC, est droit.* Fig. 78.

Car il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence, c'est-à-dire 90 degrés.

IV.

Fig. 78. 161. *Que l'angle A B E qui s'appuie sur un arc A E moindre que la demi-circonférence, est aigu.*

V.

162. *Que l'angle C D H, qui a son sommet en D, & qui s'appuie sur l'arc C E A H, plus grand que la demi-circonférence, est obtus.*

PROBLEMES.

I.

163. *D'un point donné A, à l'extrémité d'une ligne A B, élever une perpendiculaire sans prolonger la ligne.*

Fig. 79. Choisissez un point C à volonté hors de la ligne A B; de ce point pris pour centre, & de l'intervalle C A décrivez un arc indéfini, qui coupe A B dans un point D. Tirez ensuite par D & par C la ligne D C, prolongée jusqu'à la circonférence en E; tirez après cela E A, elle sera perpendiculaire sur A B.

Pour le démontrer, considérez que l'angle E A D a son sommet à la circonférence du cercle, & qu'il s'appuie sur un

un diametre E D ; qu'ainſi il eſt droit *, *N. 160.
& par conſéquent que E A eſt perpendiculaire à A B.

I I.

164. *D'un point donné A, ſur la circonférence d'un cercle, lui mener une tangente.* Fig. 80.

Il faut tirer le rayon C A, & élever du point A ſur C A, la perpendiculaire A B ; elle ſera la tangente demandée *. *N. 147.

I I I.

165. *D'un point donné B, hors la circonférence d'un cercle X, lui mener une tangente A B.* Fig. 81.

Tirez du centre C au point B, la ligne C B ; & du point D, milieu de cette ligne, & de l'intervalle de ſa moitié D C ou D B, décrivez un cercle Y, qui coupe la circonférence du cercle X en un point quelconque A ; par ce point, & par le donné B, menez la ligne A B ; elle ſera tangente au cercle X, ou, ce qui eſt la même choſe, perpendiculaire à ſon rayon.

Pour le démontrer, tirez C A. L'angle C A B eſt droit, puiſqu'il a ſon ſommet

en A, dans la circonférence du cercle Y,
* N. 160. & qu'il s'appuie sur son diametre CB*. Donc AB est perpendiculaire à AC; Mais AC est le rayon du cercle X. Donc, &c.

REMARQUE.

On ajoutera ici une maniere de mener une parallele à une ligne donnée, qui est fort usitée dans la pratique des fortifications, & qu'on n'a pu donner plutôt, parce que sa démonstration dépend de la propriété de la tangente.

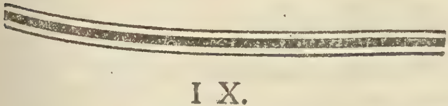
Fig. 82. 166. Soit la ligne AB à laquelle on veut mener une parallele, qui en soit éloignée d'une grandeur aussi donnée CK.

Prenez sur AB deux points C & E vers les extrêmités de cette ligne; ensuite de chacun de ces points pris pour centre & de l'intervalle CK, décrivez deux arcs indéfinis MN, OP; tirez la ligne FH qui touche ces arcs sans les couper, elle sera parallele à AB.

Car tirant des centres C & E les lignes CK, & EL aux points K & L, dans lesquels la ligne FH touche les arcs MN, OP, ces lignes CK & EL seront per-
* N. 147. pendiculaires sur la tangente FH*. Mais elles sont égales par la construction. Donc les lignes AB & FH qui ont entr'elles

des perpendiculaires égales, sont paralleles*.

* N. 127.



I X.

Des Triangles.

On a déja dit qu'une figure étoit un espace terminé de tous côtés par des lignes.

167. Une figure plane (& c'est de cette seule espece dont il s'agit ici) terminée par des lignes droites, se nomme *figure rectiligne*; *curviligne*, si elle est bornée de lignes courbes; & *mixtiligne*, si ce sont des lignes droites & des lignes courbes qui la terminent.

168. Dans la Géométrie ordinaire, on ne considere aucune figure curviligne ou mixtiligne, si ce n'est le cercle ou des parties de cercle.

169. Parmi les figures, les plus simples sont les *triangles*.

170. Le triangle est une figure terminée par trois côtés, comme la figure A B C, qui est terminée par les côtés A B, B C, & C A. *Fig. 83.*

171. Les triangles prennent différens noms, suivant qu'ils sont considérés par

rapport à leurs côtés, ou par rapport à leur angles.

Fig. 84 & 85. 172. Par rapport aux côtés, celui qui a ses trois côtés égaux, comme A B C, se nomme *équilatéral*; celui qui n'a que deux côtés égaux, comme D E F, dans lequel D F est égal à F E, se nomme *isoscele*; & enfin celui qui a ses trois côtés inégaux est appellé *scalene*.

Fig. 86. 173. Par rapport aux angles, le triangle qui a un angle droit, comme G H I, dans lequel l'angle GHI est supposé droit, est appellé *triangle rectangle*, & le côté G I opposé à l'angle droit, se nomme *hypoténuse*: le triangle qui a un angle obtus est appellé *obtusangle*, comme LMN, & enfin celui qui a ses trois angles aigus est appellé *acutangle*.

Fig. 87. 174. La *base* d'un triangle est un de ses côtés, pris à volonté, comme M N dans le triangle L M N, & alors le sommet L de l'angle M L N opposé à la base, se nomme le sommet du triangle. Si on avoit pris L M pour la base de ce triangle, le point N en auroit été le sommet.

175. La hauteur d'un triangle est une perpendiculaire L P abaissée du sommet L sur la base MN, prolongée lorsqu'il en est besoin.

THEORÊME I.

176. *Dans tout triangle, deux côtés pris ensemble, sont toujours plus grands que le troisieme.*

Cette proposition est évidente; car il est clair, par exemple dans le triangle LMN, que les deux côtés LM, & MN qui font une ligne courbée LMN, sont plus grands que la droite LN*. *Fig. 87.*

* *N. 26.*

THEORÊME II.

177. *Les trois angles de tout triangle sont égaux, pris ensemble, à deux angles droits.*

DEMONSTRATION.

Soit le triangle ACB dans lequel on veut prouver que ses trois angles A, C, B sont égaux à deux angles droits, ou à cent quatre-vingts degrés. *Fig. 88.*

Prenant AB pour base, soit mené par le sommet C la ligne DE parallele à AB. Cette ligne fait trois angles de suite DCA, ACB & BCE avec les deux côtés CA & CB du triangle, qui sont par conséquent égaux à deux angles

* N. 89. droits*. Ainsi si on démontre que les trois angles du triangle ACB sont égaux à ces trois angles de suite, on aura démontré qu'ils valent deux angles droits.

A cause de la parallele DE, l'angle
* N. 135. DCA est égal à son alterne CAB*; l'angle ACB qui est l'angle du sommet du triangle est égal à lui-même; & le troisieme angle de suite ECB est aussi égal à son alterne CBA. Donc les trois angles du triangle ABC, sont égaux à deux angles droits. Il est évident qu'on peut démontrer la même chose de tout autre triangle. Donc, &c.

COROLLAIRES.

I.

Il suit de cette proposition,

178. *Que lorsqu'on connoît deux angles dans un triangle, on peut sçavoir quelle est la valeur du troisieme.*

Car si on suppose dans le triangle ACB que l'angle CAB soit de 50 degrés, & l'angle ABC de 60, ajoutant ensemble ces deux angles, leur somme fera 110 degrés, qui étant ôtés de 180, valeur des trois angles du triangle, il

restera 70 degrés pour celle du troisieme angle ACB.

II.

179. *Que lorsqu'un triangle est rectangle, si l'on connoît l'un de ses deux angles aigus, on connoîtra aussi l'autre.*

Car les deux aigus ne valent ensemble qu'un droit; ainsi de 90 degrés ôtant l'angle aigu connu, le reste sera la valeur de l'inconnu.

III.

180. *Qu'un triangle ne peut avoir ensemble un angle droit & un obtus, mais seulement l'un ou l'autre.*

THEORÊME III.

181. *Si l'on prolonge un côté quelconque AC d'un triangle ABC, l'angle extérieur BCD sera égal aux deux opposés intérieurs A & B.* *Fig. 88.* * *.

DEMONSTRATION.

On a vu dans la proposition précédente * que les trois angles de tout triangle valent deux angles droits. Ainsi, les deux angles A & B joints avec l'an- * *N. 177.*

gle A C B, valent cent quatre-vingts degrés ; mais l'angle extérieur B C D, joint aussi avec l'angle A C B, qui est son supplément, vaut pareillement deux angles droits. Donc il est égal aux deux angles A & B pris ensemble, puisqu'en lui ajoûtant le même angle A C B, il forme une
* *N. 9.* somme égale à celle de ces * deux angles joints au même angle. C. q. f. d.

THEORÊME IV.

182. *Dans tout triangle les angles dépendent des côtés qui leur sont opposés, & réciproquement les côtés dépendent des angles : c'est-à-dire, que si le triangle est équilatéral, ses trois angles sont égaux entr'eux ; que s'il est isoscele il a deux angles égaux, & que si ses trois angles sont égaux, il est équilatéral, & isoscele s'il n'a que deux angles égaux.*

Soit le triangle équilatéral A B C, il faut démontrer que ses trois angles sont égaux.

DEMONSTRATION.

Fig. 89. Faites passer par le problême du n. 62 la circonférence d'un cercle par le sommet des angles de A, B & C; consi-

dérez enſuite que les côtés de ce triangle ſont les cordes des arcs qu'ils ſoutiennent, & que comme ils ſont égaux, les arcs le ſont auſſi *. Or chaque angle de ABC a pour meſure la moitié de l'arc ſur lequel il s'appuie *, c'eſt-à-dire, la moitié d'arcs égaux. Donc ils ſont égaux : donc le triangle équilatéral a ſes trois angles égaux. C. q. f. d. * *N.* 50. * *N.* 157.

On démontrera de la même maniere que le triangle iſoſcele a deux angles égaux.

Car ayant fait paſſer la circonférence d'un cercle par les trois angles de ce triangle, on n'aura que les deux arcs ſoutenus par les côtés égaux qui ſeront égaux : or les angles oppoſés à ces côtés auront chacun pour meſure la moitié de ces arcs *. Donc ils ſeront égaux : donc, &c. * *N.* 157.

Pour démontrer préſentement, que ſi les trois angles du triangle ACB ſont égaux, il ſera équilatéral, *Fig.* 89.

Il faut encore faire paſſer la circonférence d'un cercle par le ſommet de ces angles, & conſidérer que les côtés du triangle diviſeront cette circonférence en trois parties égales entr'elles. Car les angles du triangle ACB ont chacun pour meſure la moitié des parties ſur leſ-

quelles ils s'appuient : mais comme ils ſont égaux par la ſuppoſition, il faut que ces moitiés ſoient égales, & par conſéquent que les arcs entiers le ſoient également ; les côtés du triangle ſont les cordes de ces arcs, mais dans le même cercle les arcs égaux ſont ſoutenus par des cordes égales *. Donc les trois côtés du triangle ſont égaux : donc le triangle qui a ſes angles égaux eſt équilatéral. C. q. f. d.

* N. 50.

Il eſt évident par cette même démonſtration, que le triangle qui a deux angles égaux, a auſſi deux côtés égaux ou qu'il eſt iſoſcele.

COROLLAIRE I.

Il ſuit du précédent theorême,

183. 1°. Que chaque angle du triangle équilatéral vaut 60 degrés. Car comme ils valent tous les trois enſemble 180 degrés, & qu'ils ſont égaux entr'eux, chacun en vaut le tiers, c'eſt-à-dire 60.

COROLLAIRE II.

104. 2°. Que le triangle iſoſcele a deux angles égaux, & réciproquement que celui qui a deux angles égaux a auſſi deux côtés égaux, ou qu'il eſt iſoſcele.



THEORÊME V.

185. *Dans tout triangle, le plus grand côté est opposé au plus grand angle, & réciproquement au plus grand angle est opposé le plus grand côté.*

Soit le triangle A B C, dont C B soit le plus grand côté, il faut démontrer que l'angle C A B qui lui est opposé, est le plus grand angle du triangle. *Fig. 90.*

Puisque C B est plus grand que C A, soit pris sur C B, la partie C D égale à C A, & soit tiré A D. On aura alors le triangle isoscele C A D, dont les angles C A D & C D A seront égaux *. Or C D A est l'angle extérieur du triangle A B D. Donc il est plus grand que l'angle B * : donc l'angle C A D est aussi plus grand que ce même angle B, & à plus forte raison l'angle C A B qui est plus grand que l'angle C A D : donc l'angle C A B opposé au grand côté C B, est plus grand que l'angle C B A opposé au côté C A. * *N.* 184. * *N.* 181.

On démontrera de la même maniere, que l'angle C A B est plus grand que l'angle C opposé à A B.

Pour la seconde partie de la proposi-

tion, qui consiste à démontrer que si l'angle C A B est le plus grand angle du triangle C B A, le côté C B opposé à cet angle, sera plus grand que chacun des autres côtés du même triangle, il faut tirer la ligne A D qui fasse avec A C l'angle C A D égal à l'angle D C A. On aura alors le triangle isoscele A D C qui donnera D C égale à A D *, & la ligne courbée A D B égale à la droite B C; mais cette ligne courbée est plus grande que la droite A B *. Donc C B est aussi plus grande que cette même ligne : donc, &c.

* N. 184.

* N. 17.

On démontrera de la même maniere que C B est plus grand que C A.

Il suit de cette proposition,

186. Que dans les triangles égaux les côtés égaux sont opposés aux angles égaux, & que les côtés qui sont opposés aux angles égaux sont égaux.

THEORÊME VI.

187. *Si l'on a un triangle équilatéral A B C, & qu'on prolonge un de ses côtés B C en D, faisant B D égal à B C, qu'on tire ensuite D A, cette ligne sera perpendiculaire sur A C.*

DEMONSTRATION.

L'angle extérieur ABD du triangle ABC vaut 120 degrés, puisqu'il est égal aux deux opposés intérieurs A & C de ce triangle, qui valent chacun 60 degrés *. Or le triangle DBA est isoscele; car DB est égal à BC, ou à AB. Donc les deux angles D & DAB, qui valent ensemble 60 degrés, étant le supplément de 120, valent chacun 30 degrés. Ainsi l'angle DAC est composé de deux angles CAB & BAD, dont le premier vaut 60 degrés, & le second 30. Donc cet angle vaut 90 degrés: donc, &c. *Fig. 91.* * *N. 183.*

On peut tirer de cette proposition un moyen facile d'élever une perpendiculaire à l'extrêmité d'une ligne.

Supposant que A soit l'extrêmité d'une ligne droite AC, sur laquelle on veut élever une perpendiculaire. On prendra sur cette ligne une partie quelconque AC, sur laquelle on décrira un triangle équilatéral, & prolongeant vers D le côté CB de ce triangle opposé à A, & faisant BD égal à CB, si l'on tire DA, elle sera perpendiculaire sur l'extrêmité A de la ligne proposée: ce qui est évident par le précédent Théorême.

De l'égalité des triangles.

188. L'idée la plus ordinaire que l'on a de l'égalité des Figures, c'est que si on les pose les unes sur les autres, elles peuvent se couvrir exactement sans se déborder d'aucun côté. En nous servant de cette idée nous ferons voir que les triangles seront égaux, lorsqu'en les imaginant posés les uns sur les autres, d'une certaine maniere, il s'ensuivra qu'ils se couvriront exactement, c'est-à-dire, que les trois côtés des uns couvriront exactement les trois côtés des autres. Cette façon de démontrer, s'appelle *superposition*.

REMARQUE.

189. Dans tout triangle, il y a six choses à considérer; sçavoir, trois côtés & trois angles; mais comme deux angles d'un triangle déterminent le troisieme *, ces six choses peuvent se réduire à cinq, qui sont les trois côtés & deux angles.

*N. 178.

Nous allons démontrer dans les propositions suivantes, que trois de ces cinq choses suffisent pour déterminer le triangle, ou, si l'on veut, pour le construire;

ensorte, que par leur moyen on pourra venir à la connoissance des deux autres. *Qu'ainsi les triangles qui auront chacun trois choses égales des cinq qui les déterminent*, sçavoir, *ou les trois côtés, ou deux côtés & l'angle formé par ces côtés, ou un côté & deux angles, seront égaux entr'eux.*

THEORÊME VII.

190. *Si un triangle ABC a ses trois côtés égaux, chacun à chacun, aux trois côtés d'un autre triangle* abc, *le premier aura aussi ses trois angles égaux, chacun à chacun, à ceux du second, & il lui sera entiérement égal.*

DEMONSTRATION.

Mettez par la pensée les trois côtés du premier sur les trois côtés du second, chacun sur chacun, de maniere que leurs extrêmités tombent les unes sur les autres, ce qui peut se faire, puisque ces côtés sont égaux entr'eux; alors le premier triangle ABC couvrira exactement le second; ainsi leurs angles seront les mêmes. Donc ces deux triangles seront entiérement égaux : donc, &c. *Fig. 92.*

REMARQUE.

191. Pour rendre cette démonſtration plus exacte, ſoit ſuppoſé le premier triangle A B C porté ſur le ſecond *abc*, de maniere que leurs baſes A B, *ab*, ſe couvrent exactement. Il s'agit de faire voir que dans cette poſition, les côtés C A & C B de A C B, ne peuvent tomber ailleurs que ſur les côtés correſpondans *ca* & *cb*, de *acb*.

Pour cela du point *a*, pris pour centre, & de l'intervalle A C, décrivez un arc qui aura tous ſes points éloignés de *a* de la diſtance A C : enſuite du point *b*, pris auſſi pour centre, & de l'intervalle B C, décrivez de même un ſecond arc qui aura tous ſes points éloignés de *b* de l'intervalle B C. Ces deux arcs ſe couperont dans un point *c*, qui eſt le ſeul duquel on puiſſe tirer deux lignes égales aux deux rayons C A & C B égaux à *ac* & *bc*. Donc en mettant la baſe du triangle A B C ſur celle de *abc*, ſes deux côtés C A & C B ne peuvent ſe réunir que dans le point *c* du triangle *abc* : donc ils tombent exactement ſur *ac* & *bc*. D'où il ſuit que ces triangles ſe couvrent mutuellement, & que

leurs angles ſont égaux entr'eux, chacun à chacun. Ce qu'il falloit démontrer.

THÉORÊME VIII.

192. *Si les deux côtés CA & CB d'un triangle ACB, ſont égaux aux deux côtés* ca, cb *d'un autre triangle* acb*; que de plus, l'angle ACB compris par les deux côtés du premier, ſoit égal à l'angle* acb *compris par les deux côtés du ſecond, le premier ſera égal au ſecond.*

DEMONSTRATION.

Soit ſuppoſé le premier triangle ACB porté ſur le ſecond, de façon que le côté AC couvre exactement *ac*; alors à cauſe de l'égalité des angles ACB, *acb*, CB tombera ſur *cb*, & comme ces deux côtés ſont égaux, le point B tombera ſur le point *b*. Donc la baſe AB du premier triangle couvrira la baſe *ab* du ſecond : donc ces deux triangles ſe couvriront exactement : donc ils ſont égaux : donc, &c. *Fig. 95.*

THEORÊME IX.

193. *Si la baſe AB d'un triangle*

A C B est égale à la base a b *d'un autre triangle* a c b, *& que les angles A & B sur la base du premier soient égaux, chacun à chacun, aux angles* a *&* b *sur la base du second, le premier triangle sera égal au second.*

DEMONSTRATION.

Fig. 94. Portez encore par la pensée le premier triangle A C B sur le second, de maniere que A B couvre exactement *ab*; alors à cause de l'égalité des angles de la base, les côtés A C & B C de ce triangle tomberont sur les côtés *ac* & *bc* de l'autre triangle. Donc ils se rencontreront dans le même point *c*: donc ils se couvriront exactement : donc ils seront égaux. C. q. f. d.

PROBLEMES.

I.

194. *Sur une ligne donné A B, décrire un triangle équilatéral.*

Fig. 95. Prenez les points A & B pour centre, & de l'intervalle de A B, décrivez deux arcs qui se coupent dans un point C, duquel tirez des lignes C A & C B, & vous aurez le triangle équilatéral demandé A C B.

Pour le démontrer, considérez que les lignes CA & CB sont chacune égales au rayon des arcs qui se coupent en C, & que par la construction, ce rayon est égal à AB; qu'ainsi les trois côtés du triangle ABC sont chacun égaux à AB, & que par conséquent il est équilatéral.

II.

195. *Faire un triangle qui ait pour côtés trois lignes données A, B & C, dont deux prises ensemble, sont plus grandes que la troisieme.* Fig. 96.

Resolution.

Prenez une des lignes données A pour base du triangle; d'une de ses extrêmités E prise pour centre, & de l'intervalle de la ligne B, décrivez un arc vers D; de son autre extrêmité F, & de l'intervalle de la troisieme ligne donnée C, décrivez un arc qui coupe le premier en D; duquel point, tirez les lignes DE & DF pour avoir le triangle FDE, qui aura ses côtés égaux aux trois lignes données A, B & C.

La démonstration en est évidente par la construction.

III.

Fig. 97. 196. *Faire un triangle qui ait pour base une ligne égale à une ligne donnée AB, & les angles sur cette base égaux à deux angles donnés* a & b, *moindres que deux droits.*

RESOLUTION.

Tirez la ligne FG égale à la ligne AB, & faites au point F l'angle GFH égal à l'angle *a*, & au point G, l'angle FGH égal à l'angle *b*; prolongez les deux côtés de ces angles jusqu'à ce qu'ils se rencontrent dans un point H : alors le triangle FGH sera le triangle demandé.

REMARQUE.

Si les angles *a* & *b* étoient donnés en degrés, il faudroit faire sur FG aux points F & G, des angles, avec le rapporteur, de la quantité des degrés de *a* & de *b*.

Usages qu'on peut faire des triangles pour mesurer les lignes accessibles par leurs extrêmités seulement, ou entierement inaccessibles, &c.

197. On appelle *Trigonométrie* la partie de la Géométrie qui traite des mesures des triangles, & qui par la connoissance des trois choses qui les déterminent, fait parvenir à connoître les côtés ou les angles inconnus.

On peut résoudre les problêmes de la trigonométrie par le calcul, ou sans calcul. La premiere méthode est plus exacte que l'autre, & on la trouvera dans *l'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier* : on ne la donne point dans cet abregé, parce qu'elle suppose plusieurs propositions dont on n'a pas dessein de parler. On résoudra donc ici les problêmes suivans, sans calcul ; ils serviront à donner une idée de la fécondité des principes déja établis, & de l'application qu'on en peut faire : mais auparavant il faut définir les différentes sortes de lignes qu'on peut avoir à mesurer sur le terrein.

198. On appelle lignes *horisontales* des lignes couchées sur le terrein, ou paralleles à sa surface, parce que dans cette situation, elles le sont aussi à un grand cercle appellé *horizon*, lequel est imaginé passer par le centre de la terre, & la diviser en deux également ; sçavoir, en partie supérieure, & en partie inférieure.

199. On appelle lignes *verticales* ou *perpendiculaires à l'horizon*, des lignes droites qui ne penchent d'aucun côté sur le terrein, c'est-à-dire, qui font des angles droits avec toutes les lignes horizontales qui passent par le point où elles sont élevées sur le terrein.

200. Une *ligne oblique* ou *inclinée à l'horizon*, est une ligne qui penche sur le terrein plus d'un côté que d'un autre; telle est une ligne droite tirée du sommet d'une montagne à son pied.

201. On appelle aussi *figures horizontales* celles qui sont formées de lignes horizontales ou tracées sur le terrein; & enfin *figures verticales*, celles qui sont élevées perpendiculairement au terrein.

PROBLÊME I.

Fig. 98. 202. *Trouver la largeur AB d'un étang, ou, ce qui est la même chose, la longueur d'une ligne AB accessible seulement par ses extrêmités A & B.*

On fera planter deux piquets ou jalons aux points A & B; ensuite si la campagne est libre, comme on le suppose ici, on choisira un point C à volonté, duquel on puisse voir les piquets A & B, & y aller sans obstacle.

On plantera auſſi un piquet en C, & on s'éloignera de ce point, ſuivant le prolongement de CB; on plantera pluſieurs piquets dans l'alignement de C & de B: on prolongera de même avec des piquets, le côté AC, & l'on meſurera enſuite CB & CA pour faire CE égal à CB, & CD égal à AC; cela fait, on tirera ED, il ſera égal à la ligne AB.

Pour le démontrer, conſidérez que les deux côtés CE & CD du triangle ECD ſont égaux, par la conſtruction, aux deux côtés AC & CB de ACB; de plus, que l'angle ECD formé par les deux côtés du premier eſt égal à l'angle ACB formé par les deux du ſecond, puiſque ces angles ſont oppoſés au ſommet. Donc les deux triangles ECD, ACB ſont égaux *: donc les lignes ED & AB, ſont égales. C. q. f. d. * N. 192.

203. Si la campagne ſe trouve trop inégale ou trop reſſerrée pour permettre de s'étendre, comme on vient de le faire au-delà de AB, on peut meſurer le triangle ACB, & le conſtruire dans un autre endroit du terrein où l'on puiſſe aller le long de AB.

Pour cela, il faut meſurer ſes deux côtés AC & CB, & l'angle ACB que

ces côtés font ensemble. C'est tout ce dont on a besoin pour la construction de ce triangle.

Fig. 99. Il n'y a qu'à choisir ensuite un terrein commode sur lequel on prenne GH égal au nombre de toises de AB, faire avec le Graphométre, l'angle GHL égal à ACB, & le côté HL égal à CB: il est évident que le triangle GHL sera égal

* N. 198. au triangle ACB*, & que GL sera par conséquent égal à la ligne AB que l'on vouloit connoître.

Comme la construction sur le terrein d'un nouveau triangle égal à ACB, peut devenir embarrassante dans plusieurs cas, voici un moyen de l'éviter, en rapportant ce triangle sur le papier par le moyen d'une *échelle* & du rapporteur.

De l'échelle d'un plan ou d'une figure.

204. Il est évident que lorsque l'on construit sur le papier une figure prise ou tracée sur le terrein, il faut nécessairement qu'elle occupe moins d'espace sur le papier que sur le terrein, & cependant qu'elle serve à faire connoître la grandeur de toutes les parties de l'objet qu'elle doit représenter. C'est pour cela que lorsqu'il faut rapporter du terrein sur le papier

papier une figure quelconque, on commence, pour ainsi dire, par raccourcir ou diminuer la mesure du terrein. Je veux dire que, si toutes les parties de la figure du terrein sont exprimées en toises & en pieds, on commence par déterminer une longueur arbitraire pour représenter sur le papier la longueur de la toise du terrein, & cette longueur se proportionne à la grandeur qu'on veut donner à la figure, relativement au papier sur lequel on doit la représenter ou dessiner.

Ainsi on peut prendre un pouce pour représenter 100 toises ou 50 toises du terrein, &c. Si l'on a pris un pouce pour 50 toises, une longueur de trois pouces donnera 150 toises, de quatre, 200, &c. C'est cette longueur, ainsi déterminée, pour représenter celle dont on s'est servie pour mesurer sur le terrein, qui se nomme *échelle*; ensorte qu'on peut la définir *une ligne d'une longueur déterminée, à laquelle on suppose une valeur à volonté.*

Si on suppose, par exemple, que la ligne A B ait été déterminée pour représenter une longueur de 100 toises, sa moitié A C vaudra 50 toises, & cette moitié étant divisée en cinq parties égales, donnera des divisions de 10 toises *Fig. 100.*

chacune ; si ces divisions sont assez grandes pour être divisées en 10 parties égales, elles donneront des toises, lesquelles divisées en 6, donneront des pieds, & si les pieds sont assez grands pour être divisés en douze parties égales, ils donneront des pouces, &c. Tout cela est évident, & paroît suffisant pour donner une idée nette & exacte de ce que c'est que l'échelle d'une figure, de même que de ses usages ou propriétés.

205. *Rapporter ou construire sur le papier une figure mesurée sur le terrein.*

Fig. 98. Tout le détail précédent bien conçu, supposons à présent qu'il faut rapporter le triangle A C B sur le papier ; que le côté A C a été mesuré & trouvé de 40 toises, le côté B C de 50, & l'angle A C B de 70 degrés.

Fig. 101 & 102. Cela posé, on commencera par faire l'échelle de la figure ; on tirera pour cela une ligne indéfinie, sur laquelle on prendra une partie *a c* à volonté, pour représenter, par exemple, 10 toises ; ainsi portant cette partie cinq fois sur *a b* de *a* en *b*, on aura la longueur ou l'échelle *a b* de 50 toises. S'il se trouvoit dans la figure des lignes plus longues

que 50 toises, on pourroit augmenter la longueur de l'échelle; par exemple, la faire de 100 ou 150 toises, &c. en prolongeant la ligne *ab*, & portant sur son prolongement, *ac* une ou deux fois, &c.

On écrit sous chaque division de l'échelle le nombre des toises qu'elle contient, depuis le commencement *a*, jusqu'au point de la division où l'on est parvenu. Ainsi dans cet exemple, on écrit 10 sous la premiere, 20 sous la seconde, &c. Le dernier nombre écrit à l'extrêmité *b* de l'échelle, exprime toute la valeur de l'échelle.

206. L'échelle *ab* ainsi construite, tirez sur le papier une ligne indéfinie *ih*, sur laquelle vous prendrez la partie *ig* de 40 toises de l'échelle, pour représenter le côté A C du triangle A C B du terrein : au point *i* vous ferez avec *gi*, par le moyen du rapporteur, l'angle *gim* de 70 degrés, qui est la valeur de l'angle A C B du terrein. Vous ferez *im* de 50 toises, qui est la longueur de C B, & vous tirerez *gm*, laquelle étant portée sur l'échelle *ab*, marquera par le nombre des toises qu'elle contiendra, le nombre de celles du terrein que contient la ligne à mesurer A B. *Fig. 101 & 102.*

Pour le prouver, considérez que le

triangle *gim* eſt déterminé par les trois mêmes choſes que le triangle ACB du terrein, & que chaque toiſe du papier exprime chaque toiſe du terrein; qu'ainſi les toiſes de l'échelle que *gm* contient, répondent néceſſairement aux toiſes du terrein que contient la ligne à meſurer AB. On en trouvera une démonſtration plus exacte dans *l'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier*.

Fig. 99 & 102. 207. Deux figures, comme les deux triangles *gim* & ACB, déterminées par les mêmes circonſtances; mais avec des meſures différentes, ſont nommées *figures ſemblables*. On trouvera dans le livre qu'on vient de citer, un détail plus complet de ces ſortes de figures & de leurs propriétés.

PROBLÊME II.

208. *Meſurer la largeur d'une riviere ou d'une ligne acceſſible ſeulement par une de ſes extrêmités.*

Fig. 103. Soit X la riviere dont on veut avoir la largeur: on déterminera une ligne AB au bord de la riviere, d'une longueur à peu près égale à ſa largeur; on mettra le demi-cercle au point A, de

maniere qu'en regardant par les pinnules de ſon diametre, on voye un piquet planté en B; on mettra enſuite l'alidade ſur le point de 90 degrés, & bornoyant par ſes pinnules, on obſervera un point quelconque, comme C, de l'autre côté de la riviere, qui ſe trouvera dans la direction du rayon viſuel; on remarquera ce point, on plantera un piquet en A, & l'on viendra avec l'inſtrument en B; on meſurera l'angle A B C, & enſuite la baſe A B, après quoi on connoîtra les trois choſes qui déterminent le triangle A C B; ſçavoir ſa baſe & les angles ſur ſa baſe. On le rapportera ſur le papier comme le triangle du premier problême *, & l'on connoîtra, par l'échelle, le nombre de toiſes de la ligne A C, ou de la largeur de la riviere. * *N. 206.*

REMARQUE.

I.

209. Si le terrein du côté de la baſe A B ſe trouve libre & uni, on peut, ſans rapporter le triangle C A B ſur le papier, le conſtruire bien facilement ſur le terrein, en prolongeant vers D la perpendiculaire C A indéfiniment, & faiſant au point B l'angle A B D égal à C B A;

ſon côté B D coupera la perpendiculaire C A prolongée dans un point D, qui
*N. 193. donnera A D égal à A C *.

I I.

210. On a dit qu'il falloit prendre la baſe A B à peu près égale à la longueur de la ligne à meſurer, afin d'éviter que l'angle C ne devienne trop aigu, auquel cas le point d'interſection C des lignes A C & B C ſeroit difficile à déterminer, parce qu'elles ſe couperoient trop obliquement.

PROBLÊME III.

211. *Trouver la longueur d'une ligne C D entiérement inacceſſible.*

Fig. 104. On choiſira d'abord dans la campagne une baſe A B, vis-à-vis la ligne à meſurer C D : on imaginera des extrêmités A & B de cette ligne aux points C & D, des lignes A C, B C, A D, B D qui donneront les deux triangles C A B, A D B, qui ont chacun pour baſe la même ligne A B.

On meſurera enſuite les deux angles de la baſe de chacun de ces triangles ; ſçavoir l'angle C A B & C B A pour le pre-

mier; & D B A, B A D pour le ſecond. On aura apres cela les trois choſes qui déterminent ces triangles, & l'on pourra les conſtruire ſur le papier, comme on l'a expliqué n. 206. La diſtance de leurs ſommets donnera en toiſes de l'échelle le nombre des toiſes du terrein que contient la ligne propoſée C D.

REMARQUE.

212. Ce même problême peut ſervir à mener une parallele à une ligne C D inacceſſible; car les deux triangles A C B & A D B étant rapportés & conſtruits ſur le papier, on pourra meſurer avec le rapporteur l'angle D C B, & faiſant enſuite au point B un angle avec la ligne B C, égal à B C D, le ſecond côté de cet angle ſera parallele à C D.

PROBLÊME IV.

213. *Trouver la hauteur d'une tour ou d'une ligne perpendiculaire à l'horizon, acceſſible ſeulement par ſon pied.*

On prendra un point B ſur le terrein du pied de la tour, à une diſtance à peu près égale à ſa hauteur : on poſera le demi-cercle au point B, de maniere que ſa *Fig. 105.*

circonférence ſoit perpendiculaire au terrein. Pour cela il faut mettre ſon diametre dans une ſituation parallele au terrein. On y parvient de cette maniere.

214. On ſe ſert d'un petit plomb attaché à l'extrêmité d'un fil de ſoie ; on place ce fil au point de 90 degrés de la demi-circonférence de l'inſtrument, & on éleve le diametre d'un côté ou de l'autre, juſqu'à ce que le fil paſſe par le centre du demi-cercle : alors (1) le dia-

(1) L'expérience fait voir que les corps peſans tendent au centre de la terre, & voici comment :

Si l'on ſuſpend un plomb à un fil attaché à une ligne parallele à l'horizon, il fait des angles droits avec cette ligne ; ainſi il en feroit auſſi avec le terrein, ſi le fil étoit continué juſqu'à ſa rencontre : or toute ligne horizontale étendue ſeulement de cent ou deux cens toiſes, peut être regardée comme une ligne droite, tangente à la circonférence de la terre, qui la touche au point où le plomb la rencontre, parce que la groſſeur de la terre rend ſa courbure inſenſible dans une auſſi petite diſtance : donc le fil auquel le plomb fait prendre une direction perpendiculaire à la ſurface de la terre, paſſeroit par ſon centre, en la ſuppoſant ronde, ou à peu près ronde, comme on le fait communément, s'il étoit aſſez long pour y parvenir, puiſque toute perpendiculaire élevée ſur la tangente au point touchant, paſſe par le centre du cercle, ſi elle eſt prolongée juſques-là *. Donc le diame-

* N. 148.

metre eſt dans ſa ſituation convenable pour l'opération.

On meſurera après cela l'angle EDC en faiſant mouvoir doucement l'alidade de l'inſtrument, juſqu'à ce qu'en bornoyant par ſes pinnules, on apperçoive l'extrêmité C de la hauteur AB qu'on veut meſurer; l'arc *ab* de l'inſtrument ſera la valeur de l'angle CDE. Voilà donc déja un angle de connu dans le triangle DEC: mais l'angle DEC ou ſon égal BAC, eſt auſſi connu, puiſque AC eſt ſuppoſée perpendiculaire au terrein BA. Ainſi meſurant la baſe BA, à laquelle DE eſt égale, on connoîtra les trois choſes qui déterminent le triangle DEC; enſorte qu'en le conſtruiſant ſur le papier avec l'échelle, on viendra à la connoiſſance de EC; & ajoutant à cette ligne la hauteur ED de l'inſtrument, qui eſt égale à AE, on aura la hauteur AC.

REMARQUE.

I.

215. Il eſt évident que ſi l'angle

tre de l'inſtrument faiſant des angles droits avec le fil de ſoie qui eſt perpendiculaire à l'horizon, eſt dans cette ſituation parallele à l'horizon.

CDE étoit de 45 degrés, l'angle DCE auroit auſſi la même valeur; par conſéquent le triangle DEC ayant deux angles égaux, auroit les côtés CE & DE
* N. 182. opposés à ces angles auſſi égaux *. Donc DE ou BA ſeroit alors égal à EC, c'eſt-à-dire à la hauteur de la ligne qu'on veut meſurer, moins celle de l'inſtrument.

II.

216. On peut, en tâtonant, parvenir aiſément à avoir l'angle CDE de 45 degrés; car s'il ſe trouve d'abord plus petit, il n'y a qu'à s'approcher de A, c'eſt-à-dire diminuer la longueur de la
* N. 181. baſe AB *; & s'il eſt plus grand, s'en éloigner ou augmenter AB, & cela juſqu'à ce qu'on ſoit parvenu à avoir l'angle formé de l'horizontale DE, & de l'inclinée DC de 45 degrés.

PROBLÊME V.

Fig. 106. 217. *Trouver la hauteur d'une ligne CD perpendiculaire à l'horizon de laquelle on ne peut s'approcher, c'eſt-à-dire qui eſt entiérement inacceſſible.*

Il faut choiſir dans un terrein uni de la campagne une baſe AB, des extrêmi-

tés de laquelle on puisse voir le point C.

Il faut ensuite poser l'instrument au point A dans une situation verticale, comme dans le problême précédent, & mesurer l'angle C E F formé par la ligne imaginaire E C, & par la parallele à la base E F.

On mettra après cela le demi-cercle au point B, & posé comme en A : alors on mesurera l'angle E F C, & l'on mesurera aussi la base A B, à laquelle E F sera égal : on connoîtra ainsi les trois choses qui déterminent le triangle ECF; sçavoir sa base E F, & les angles sur cette base : on pourra donc le rapporter sur le papier avec une échelle. Lorsqu'il y sera construit, on aura le point C placé sur le papier comme sur le terrein : mais la hauteur du terrein qu'on veut connoître, est une perpendiculaire qui tombe de C sur le terrein, ou sur le prolongement de A B. Donc en prolongeant sur le papier, la base E F indéfiniment, & faisant tomber de C une perpendiculaire sur cette base, elle exprimera en toises de l'échelle, le nombre des toises du terrein que contient la ligne C G sur le terrein, & ajoutant à cette valeur la hauteur A E ou B F de l'instrument, on aura la hauteur de la ligne C D.

REMARQUE.

I.

218. Il faut que la base EF soit prise assez grande pour qu'il y ait une différence sensible entre l'angle CEF, & l'angle CFG, supplément de EFC: autrement les lignes CE, CF ne concourroient point ; car elles pourroient être considérées comme paralleles *.

* *N. 132.*

II.

219. Le triangle ECF étant construit sur le papier, & la perpendiculaire CG abaissée du sommet C sur le prolongement de la base EF, il est clair qu'on peut connoître, avec l'échelle, la ligne FG ou BD : ainsi si l'on suppose que CD soit la hauteur d'une tour ou celle d'une montagne ; l'opération qu'on vient de faire fera connoître non seulement la valeur de la perpendiculaire abaissée du sommet de la tour ou de la montagne sur le plan de la base AB ; mais encore la distance du point B de la base au milieu de la tour ou de la montagne.

III.

220. Il eſt évident que cette opération ne donne la hauteur de l'objet propoſé C D qu'au deſſus du terrein de la baſe A B, & qu'ainſi, ſi cet objet étoit dans un terrein plus enfoncé ou plus profond que celui de A B, on n'auroit la hauteur de cet objet qu'au deſſus du terrein de la baſe A B.

PROBLÊME. VI.

221 *D'un lieu élevé perpendiculairement au deſſus d'un terrein, & dont la hauteur peut être connue, trouver la largeur de ce terrein.*

Soit C le lieu élevé au deſſus du terrein A B, comme par exemple, l'ouverture d'une croiſée, ou la partie ſupérieure d'une tour, il faut de ce lieu meſurer la ligne horizontale A B. *Fig. 107.*

On poſera le demi-cercle en C, de maniere que ſon diametre ſoit perpendiculaire au terrein ou parallele à C A; ce qui eſt fort aiſé, en mettant un fil avec un plomb à l'extrêmité ſupérieure du diametre, & en arrangeant l'inſtrument de maniere que le fil paſſe auſſi par l'autre extrêmité.

Cela fait, on fera mouvoir l'alidade, jusqu'à ce qu'en regardant par ses pinnules, on apperçoive le point B; alors on aura l'arc *ab* du demi-cercle qui donnera la valeur de l'angle A C B. L'angle C A B est droit, puisqu'on suppose que A C est perpendiculaire au terrein : ainsi il ne s'agit plus que de connoître C A pour pouvoir construire le triangle C A B sur le papier. Pour cela, on fera tomber un plomb ou une pierre par l'ouverture C, auquel sera attachée une corde, & on le fera descendre ainsi jusqu'en A; mesurant ensuite la longueur de cette corde, comprise entre C & A, on connoîtra la hauteur C A, & par conséquent on pourra connoître A B, en construisant le triangle C A B sur le papier, comme dans les problêmes précédens.

PROBLÊME VII.

Fig. 108. 222. *Mesurer un angle A B C, dont on ne peut approcher.*

Il faut choisir dans la campagne un point quelconque D dans le prolongement de B C, & y faire planter un piquet D, & de même un autre point E

dans le prolongement de A B : ensuite imaginant la ligne D E, on mesurera les angles B D E, B E D : on ôtera leur somme de 180 degrés ; le reste sera la valeur de D B E *, & par conséquent celle de son opposé au sommet A B C. * N. 178.

REMARQUE.

223. Si l'on peut approcher du point B, on mesurera fort facilement & sans instrument, l'angle A B C ; car prolongeant les côtés A B & B C d'une grandeur arbitraire B D & B E, & les mesurant, de même que la distance D E de leurs extrêmités D & E, on aura un triangle D B E dont les trois côtés seront connus ; ensorte qu'en le construisant sur le papier, par le moyen d'une échelle, on pourra après cela en mesurer les angles avec le rapporteur, & connoître ainsi l'angle proposé A B C * qui est égal à D B E. Fig. 108. * N. 190.

On peut de la même maniere mesurer en dedans un angle I B G accessible. Fig. 109.

PROBLÊME VIII.

224. *Faire la carte d'un pays.*

La carte d'un pays est une figure plane, sur laquelle sont marqués tous les

lieux qu'il contient, suivant la position qu'ils ont entr'eux. C'est proprement une figure semblable au pays, sur laquelle on connoît toutes les distances des lieux par le moyen d'une échelle.

On n'a pas dessein d'entrer dans cet ouvrage dans tout le détail dont cette opération est susceptible: on veut seulement donner une idée de la maniere dont on y procede, par le moyen des triangles. Ceux qui voudront une instruction plus ample sur cette matiere, pourront consulter utilement le livre intitulé, *Méthode de lever les plans & les cartes de terre & de mer*, &c. Il se vend chez *Jombert*, rue Dauphine, à Paris.

Pour lever la carte d'un terrein, il faut commencer par choisir un endroit dans la campagne, duquel on puisse découvrir beaucoup de lieux considérables, comme clochers, moulins, châteaux, &c.

Fig. 110. On fait mesurer dans cet endroit une ligne A B des extrêmités A & B, de laquelle on découvre le plus qu'il est possible de ces lieux.

On place le demi-cercle au point A, & l'on fait planter un jalon en B, auquel on attache du papier ou un mouchoir blanc, pour aider à découvrir plus aisément ce jalon de A.

On diſpoſe le demi-cercle de maniere, qu'en regardant par les pinnules ou la lunette de ſon diametre, on voye le jalon B.

Cela fait, on prend tous les lieux remarquables C, D, E, F, &c. qui ſont devant la ligne A B, c'eſt-à-dire, qu'on imagine les lignes A C, A D, A E, &c. & qu'on meſure les angles C A B, D A B, E A B, &c. que ces lignes font avec la baſe A B.

On écrit ſur une feuille de papier, ſur laquelle on figure l'opération, & qui s'appelle *brouillon* ou *mémorial* X, la valeur de chacun de ces angles, avec le nom des lieux C, D, E, &c. & l'on écrit le long de chacune de ces lignes A C, A D, A E, &c. le nom du lieu obſervé, c'eſt-à-dire, de l'objet C, D, E, &c. *Fig.* 111.

Tous ces angles ayant été meſurés & marqués ſur le mémorial X, on ôte le demi-cercle du point A; on met à ſa place un jalon avec une marque diſtinctive pour le faire appercevoir de B, & l'on porte l'inſtrument en B, où on le poſe de maniere qu'en regardant par les pinnules ou la lunette de ſon diametre, on apperçoive le jalon A. *Fig.* 110 & 111.

On imagine enſuite les lignes B C,

BD, BE, &c. & l'on meſure les angles CBA, DBA, ABE, &c. c'eſt-à-dire, ceux que tous les lieux obſervés par la premiere opération, font avec l'autre extrêmité B de la baſe AB; on écrit le long de chaque côté BC, BD, &c. tracé ſur le mémorial X, le nom des objets C, C, &c. comme on l'a fait en A, & l'on écrit auſſi la valeur des angles obſervés ou meſurés entre les côtés de chaque angle, dans un petit arc renfermé entre ces côtés; le tout comme on le voit en X, qui eſt la figure de ce mémorial.

Par cette ſeconde opération, tous les lieux C, D, E, deviennent les ſommets des triangles ACB, ADB, &c. qui ont AB pour baſe commune, & dont les angles de la baſe ſont connus par les opérations que l'on a faites à ſes extrêmités. Il ſuit delà, que les trois choſes qui déterminent chacun de ces triangles, ſont connus * : ainſi il ne s'agit plus que de les rapporter ſur le papier, pour avoir la poſition de tous les lieux obſervés de la baſe AB, c'eſt-à-dire, de mettre au net le mémorial X.

** N. 193.*

Fig. 111 & 112. Pour cela, il faut tirer ſur le papier une ligne *ab*, à laquelle il faut donner autant de toiſes de l'échelle qu'on trouve que la baſe AB en contenoit ſur le ter-

rein. A ſes extrêmités *a* & *b*, on fait, avec le rapporteur, des angles égaux à ceux qui ont été meſurés aux points A & B ſur la baſe A B du terrein ; les côtés de ces angles étant prolongés, ſe coupent dans des points *c*, *d*, *e*, *f*, &c. qui déterminent, ſur le papier, la poſition des lieux C, A, E, &c. le point *c* où les deux lignes ſur leſquelles on a écrit le lieu C ſe coupent, donne la poſition de ce lieu ; celui où ſe joignent celles ſur leſquelles on a écrit le lieu D, donne la poſition de D, & ainſi des autres.

On prend & on rapporte de la même maniere la poſition de tous les objets conſidérables qui ſont de l'autre côté de la baſe, & ſi l'on veut prendre un plus grand nombre de poſitions que l'on n'en découvre des extrêmités de la baſe A B, on choiſit pour nouvelle baſe la diſtance de deux lieux C & D déja déterminés par les premieres opérations, & l'on prend enſuite la poſition de tous les lieux qu'on découvre de part & d'autre de cette nouvelle baſe, comme on l'a fait ſur la premiere A B ; après quoi, s'il en eſt beſoin, on choiſit encore une nouvelle baſe comme la ſeconde, & l'on opere ainſi ſucceſſivement ſur chaque baſe, juſqu'à ce que l'on ait la poſition de tous les

bourgs, villages, hameaux, châteaux, &c. du lieu dont on veut faire la carte.

On rapporte ſur le papier toutes les opérations faites ſur chaque baſe, comme on a rapporté celles de la baſe A B. On place après cela l'échelle dans un endroit de la carte, & on la diviſe en toiſes ou en lieues, ſuivant la meſure qu'elle repréſente; le tout comme on l'a expliqué, n. 204.

Une attention qu'il faut avoir en prenant la poſition des lieux qu'on veut marquer ſur la carte, c'eſt que ces lieux ne faſſent point avec la baſe des angles trop aigus ou trop obtus; autrement le point d'interſection des lignes qui en donnent la poſition, deviendroit difficile à diſtinguer, parce que ces lignes ſe couperoient trop obliquement. Pour éviter cet inconvénient, il faut, autant qu'il eſt poſſible, ne prendre que de grandes baſes, & déterminer ſeulement la poſition des lieux qui ſont vis-à-vis de part & d'autre. Pour les autres lieux, on les déterminera par de nouvelles baſes qu'on choiſira, de la maniere qu'on jugera la plus avantageuſe pour avoir exactement la poſition de ces lieux.

S'il y a des bois dans le pays dont on fait la carte, on prend la poſition des

principaux arbres qui les entourent de tous côtés ; après quoi l'eſpace renfermé par des lignes tirées des uns aux autres, donne ſur la carte l'emplacement & la figure du bois. On déterminera de même le cours des rivieres, en prenant la poſition de différens grands jalons qu'on fait planter ſur les bords pour avoir différens points du bord de ces rivieres.

REMARQUE.

225. Il eſt d'uſage de marquer ſur les cartes le côté du Nord, on le fait ordinairement en y deſſinant une *bouſſole* ; ſa figure eſt celle d'une eſpece de croix de Chevalier, dont une des pointes a une fleur-de-lys qui exprime le côté du Nord. Lorſqu'une carte a une bouſſole, on dit qu'elle eſt *orientée*.

226. Il eſt aiſé d'orienter une carte, en obſervant l'angle que l'aiguille aimantée fait ſur le terrein avec la baſe que l'on a meſurée. C'eſt principalement pour cette obſervation, qu'au centre du demi-cercle on conſtruit, preſque toujours, une bouſſole qui ne conſiſte que dans une aiguille aimantée, qui tourne librement ſur un pivot. On ſçait que la propriété de cette aiguille eſt d'avoir tou-

jours une de ſes pointes tournée du côté du Nord, ou à peu près ; je dis à peu près, parce qu'elle s'en écarte aſſez ſouvent d'un côté ou d'un autre : cet écartement ſe nomme la *déclinaiſon de la bouſſole.*

Dans une carte d'une petite étendue, on peut ſe diſpenſer d'y avoir égard. Il y a des méthodes exactes pour la connoître ; mais ce n'eſt pas ici le lieu d'expliquer en quoi elles conſiſtent. Il ſuffit de dire que cette variation eſt regardée comme irréguliere juſqu'à préſent, qu'elle n'eſt pas la même dans tous les lieux de la terre, & qu'elle change aſſez ſouvent dans les mêmes lieux.

La bouſſole conſtruite dans le demi-cercle eſt enfermée dans un enfoncement circulaire, le pivot ſur lequel elle eſt ſuſpendue en occupe le centre : la ligne qui marque le nord & le côté oppoſé, qui eſt le midi, eſt parallele au diametre du demi-cercle ; la circonférence de l'eſpace dans lequel la bouſſole ſe meut, eſt diviſée en degrés : ainſi on peut voir de quelle quantité l'aiguille s'éloigne de la ligne du Nord, & par conſéquent l'angle qu'elle fait avec la baſe du terrein, qui eſt le même que celui qu'elle fait avec la ligne du Nord,

ces deux lignes étant paralleles.

227. On obſervera ici qu'on appelle *Cartes Géographiques* celles qui contiennent un grand pays, comme un Royaume, une Province, &c. & qu'on appelle cartes *Topographiques* celles qui ne contiennent qu'un petit pays, comme une Ville avec ſes environs, une terre & ſes dépendances, &c.



X.

Des Quadrilateres.

228. Le *quadrilatere*, eſt une figure terminée par quatre côtés, comme A. *Fig. 113.*

229. *Le quarré* B, eſt un quadrilatere qui a ſes côtés égaux & ſes angles droits. *Fig. 114.*

230. *Le parallélogramme* C, eſt un quadrilatere qui a ſes côtés oppoſés paralleles; ſi ſes angles ſont droits, on l'appelle *parallélogramme rectangle*, ou, pour abréger, ſimplement *rectangle*; tel eſt le parallélogramme D. *Fig. 115 & 116.*

231. *Le rhombe* ou *lozange* E, eſt un quadrilatere qui a tous ſes côtés égaux, & les oppoſés paralleles, mais qui n'a pas ſes angles droits. *Fig. 117.*

Fig. 118. 232. *Le trapeze* F, eſt un quadrilatere qui n'a que deux côtés paralleles.

Fig. 119. 233. Le quadrilatere qui n'a point de côtés paralleles ſe nomme quadrilatere irrégulier, ou *trapézoïde*, comme G.

Fig. 120. 234. On appelle *diagonale* dans un quadrilatere une ligne, comme A D, tirée d'un angle quelconque A à ſon opposé D, en paſſant dans le quadrilatere.

235. La *baſe* d'un parallélogramme A B C D eſt un de ſes côtés C D pris à volonté, & ſa hauteur eſt une perpendiculaire A E abaiſſée du côté A B, opposé à la baſe A B, ſur cette baſe.

Il ſuit de cette définition, que lorſque le parallélogramme eſt rectangle, ſa hauteur eſt la même que le côté qui fait un angle avec la baſe; car ce côté eſt alors perpendiculaire entre la baſe & le côté opposé à la baſe.

THEORÊME I.

236. *Les côtés opposés des parallélogrammes ſont égaux.*

DEMONSTRATION.

Fig. 121. Soit le parallélogramme X, il faut démontrer que A D eſt égal à B C.

Des

Des points D & C abaissés sur A B, prolongez, s'il en est besoin, les perpendiculaires D F & C E. Elles donneront les triangles égaux A D F & B C E. Car à cause de ces perpendiculaires, les angles en F & en E sont droits, & comme elles sont tirées entre des paralleles, elles sont égales : de plus l'angle intérieur D A F est égal à son opposé extérieur C B E : donc le troisieme angle A D F du premier triangle, est égal au troisieme du second B C E : donc les deux triangles proposés ont les côtés D F & C E égaux, de même que les angles sur ces côtés : donc ils sont égaux : donc les côtés A D & B C opposés aux angles égaux F & E sont égaux*. C. q. f. d. *N. 186.

On démontrera de la même maniere l'égalité des deux autres côtés D C & A B.

THEORÊME II.

237. *La diagonale tirée dans le parallélogramme ou le quarré, le divise en deux triangles égaux.*

DEMONSTRATION.

Soit le parallélogramme A C D B, dans lequel on a tiré la diagonale A D; il faut démontrer qu'elle partage ce parallélo- *Fig. 122.*

gramme en deux triangles ACD, DAB qui sont égaux.

Pour cela, considérez que les trois côtés de chacun de ces triangles sont égaux entr'eux; car par la proposition précédente, le côté AC du premier est égal au côté BD du second, & le côté DC à AB : AD appartient à l'un & à l'autre. Donc les trois côtés de ces triangles sont égaux, chacun à chacun : donc
*N. 190. ils sont égaux entr'eux *.

Il est évident que cette démonstration est la même pour le quarré.

COROLLAIRE.

Il suit de-là,

238. 1°. Que la diagonale tirée dans un parallélogramme ou dans un quarré, le divise en deux également.

239. Et 2°. Que tout triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base & même hauteur.

Fig. 123. Car ayant le triangle ACB, si on mene par C, une parallele CD à sa base AB, & par B, une parallele à AC, on aura le parallélogramme ABDC, qui aura même base AB que le triangle, & même hauteur CG. Mais le côté CB servant de diagonale à ce parallélogram-

me, le triangle ACB en eſt la moitié : Donc, &c.

THEORÊME III.

240. *Dans tout parallélogramme ABCD, les angles oppoſés, comme D & B, ſont égaux.* *Fig. 124.*

DEMONSTRATION.

Conſidérez qu'à cauſe des paralleles AD & BC, les angles C & D valent deux angles droits *, & que les paralleles AB & CD donnent auſſi les angles C & B égaux à deux droits : donc les angles oppoſés D & B différent de 180 degrés du même angle C : donc ils ſont égaux entr'eux. ** N. 158.*

On démontrera de même que l'angle A eſt égal à l'angle C.

THEORÊME IV.

241. *Les angles de tout quadrilatere ſont égaux, pris enſemble, à quatre angles droits.*

DEMONSTRATION.

Soit le quadrilatere quelconque ABDC, pour démontrer que ſes quatre an- *Fig. 125.*

gles ſont égaux à quatre angles droits, il faut tirer la diagonale D A, qui le partagera en deux triangles quelconques A B D, A D C. Les angles de ces triangles ſont les mêmes que ceux du quadrilatere : or chacun vaut deux angles
* N. 177. droits * : donc le quadrilatere en vaut quatre. C. q. f. d.

PROBLEMES.

I.

Fig. 126. 242. *Une ligne A B étant donnée pour le côté d'un quarré, décrire ce quarré.*

RESOLUTION.

Aux extrêmités A & B de la ligne donnée, élevez des perpendiculaires A D & B C, égales chacune à A B, joignez ces perpendiculaires par la ligne D C, & le quarré ſera conſtruit : ce qui
* N. 229. eſt évident *.

II.

243. *Conſtruire un rectangle dont les deux côtés qui ſont un angle, ſoient égaux aux lignes données A & B.*

RESOLUTION.

Fig. 127. Tirez une ligne E C égale à la ligne donnée A ; élevez à ſes extrêmités E &

C deux perpendiculaires E F, C D, égales chacune à l'autre ligne donnée B, & tirez F D. Le rectangle E C D F aura pour côtés les deux lignes A & B. Ce qui est évident.

III.

244. *Construire un parallélogramme, qui ait pour côtés deux lignes égales à deux lignes données A & B, qui fassent ensemble un angle égal à un angle aussi donné C.* Fig. 128.

Resolution.

Tirez une ligne D F égale à A, & faites au point D l'angle F D E égal à l'angle donné C; prenez D E égale à B, puis du point E pris pour centre, & de l'intervalle D F, décrivez un arc vers G. Du point F pris ensuite aussi pour centre, & de l'intervalle D E, décrivez un second arc qui coupe le premier en G: tirez G F & G E, vous aurez le parallélogramme incliné D F G E, avec les circonstances demandées.



XI.

Des Polygones.

245. On appelle *Polygone* toute figure de plusieurs côtés ou de plusieurs angles.

246. Suivant cette définition, les triangles & les quadrilateres sont des polygones, & ils en sont effectivement ; mais dans l'usage ordinaire, on ne se sert du terme de polygone que pour les figures qui ont plus de quatre côtés.

Chaque polygone a un nom particulier qui se tire du nombre de ses côtés ou de ses angles.

247. Celui de cinq côtés est appellé *Pentagone.*

248. Celui de six, *Exagone.*

249. Celui de sept, *Eptagone.*

250. Celui de huit, *Octogone.*

251. Celui de neuf, *Ennéagone.*

252. Celui de dix, *Décagone.*

253. Celui de onze, *Endécagone.*

254. Celui de douze, *Dodécagone.*

255. Et enfin celui de treize côtés est appellé Polygone de treize côtés, &c.

Il y a des polygones réguliers & des irréguliers.

256. Le *Polygone régulier* eſt celui qui a tous ſes côtés & ſes angles égaux ; tel eſt le polygone A ; & *l'irrégulier* eſt celui qui a de l'inégalité dans ſes côtés ou dans ſes angles, comme le polygone Z. *Fig. 129 & 130.*

257. Les côtés qui terminent le polygone ſe nomment tous enſemble ſa *circonférence* ou ſon *perimetre*.

258. Tout polygone régulier X, a un centre. C'eſt un point C également éloigné du ſommet des angles que font enſemble les côtés AB, BD, &c. du polygone. *Fig. 131.*

On conſidere deux ſortes de rayons dans le polygone régulier ; ſçavoir le droit & l'oblique.

259. Le *rayon droit* eſt la perpendiculaire CE abaiſſée du centre C du polygone ſur un de ſes côtés quelconque AB.

260. Le *rayon oblique* eſt la ligne droite tirée du centre C à un des angles quelconque du polygone, comme CA, CB, &c.

261. Le rayon oblique meſure la diſtance du centre du polygone aux angles de ſa circonférence ; & comme toutes ces diſtances ſont égales, par la définition du centre du polygone, il s'enſuit

que tous les rayons obliques sont égaux entr'eux.

Il suit aussi de la définition du rayon droit;

262. 1°. *Qu'il mesure la distance du centre C du polygone à chacun de ses*
* N. 116. *côtés A B *.*

263. *Et 2°. Qu'il coupe chaque côté A B du polygone en deux également.*

Car le centre C étant, par sa défi-
* N. 258. nition, à égale distance de A & de B *,
& C E étant perpendiculaire sur A B,
doit avoir tous ses points à égale distance
* N. 112. de A & de B *; ainsi le point E du rayon
droit C E est au milieu de A B.

264. 3°. *Que tous les rayons droits, comme C E, C G, &c. sont égaux.*

Fig. 131. Car tous les côtés du polygone X
étant égaux, & les rayons droits les cou-
pant perpendiculairement, & en deux
* N. 263. également *, leurs moitiés A E, B G,
&c. sont égales : or si l'on imagine que B G soit porté exactement sur A E, les angles A E C, B G E, étant droits, G C tombera sur E C, & comme les lignes A C & B C sont égales, que d'ailleurs les points qui les terminent sont les mêmes dans cette position, il s'ensuit que

les deux triangles AEC & CGB se couvrent exactement. Donc CE est égal à CG : donc, &c.

Le polygone régulier, comme X, a *Fig. 131.* aussi deux sortes d'angles ; sçavoir, celui du centre, & celui de la circonférence.

265. *L'angle du centre* d'un polygone régulier, est un angle ACB formé de deux rayons obliques CA, CB qui se terminent aux extrêmités A & B du même côté du polygone.

266. *Et l'angle de la circonférence* est un angle, comme ABD, formé de deux côtés AB, BD du polygone.

Lorsque le polygone est irrégulier, *Fig. 130.* comme Z, il a quelquefois des angles *rentrans* & des *saillans*.

267. L'angle rentrant est un angle, comme A, dont le sommet rentre en dedans du polygone, & dont la mesure est en dehors ; & le saillant, comme B, est un angle dont le sommet saille en dehors du polygone, & dont la mesure est en dedans. Les polygones réguliers n'ont que des angles saillans.

THEORÊME I.

268. *Si l'on tire tous les rayons obli-*

ques d'un polygone régulier X, il sera partagé en autant de triangles égaux, qu'il a de côtés.

Fig. 132. Cette proposition est évidente; car tous les rayons obliques étant égaux en-
* N. 261. tr'eux *, de même que tous les côtés du polygone, il s'ensuit que les triangles, comme ACB, BCD, &c. qui ont chacun pour base les côtés égaux du polygone, & qui ont pour leurs deux autres côtés deux rayons obliques, ont leurs trois côtés égaux; chacun à chacun:
* N. 190. donc ils sont égaux *.

COROLLAIRE.

Il suit de cette proposition:

Fig. 132. 269. 1°. Que tous les angles des triangles ACB, BCD, &c. du polygone X, sont égaux, comparés chacun à chacun, parce que ces triangles ont
* N. 190. leurs trois côtés égaux *; qu'ainsi *tous les angles du centre d'un polygone régulier sont égaux entr'eux.*

270. Mais comme tous les angles qu'on peut faire autour d'un même point C, ne valent jamais que quatre angles
* N. 90. droits *, tous les angles du centre valent donc, pris ensemble, quatre angles droits. Comme ils sont égaux entr'eux,

& qu'il y en a autant que le polygone a de côtés, ils partagent la circonférence du cercle, c'est-à-dire, la valeur de quatre angles droits en autant de parties égales que le polygone a de côtés. D'où il suit,

271. *Que pour avoir l'angle du centre d'un polygone régulier quelconque, il faut diviser 360 degrés par le nombre de ses côtés.*

Ainsi l'angle du centre du pentagone vaut la cinquieme partie de 360 degrés, ou 72 degrés; celui de l'exagone la sixieme partie de 360 degrés, ou 60 degrés; celui du décagone la dixieme partie de la circonférence, ou 36 degrés, & ainsi des autres.

272. 2°. Que les angles C A B, C B A, C B D, & C D B, &c. faits sur les côtés A B, B D du polygone par les rayons obliques C A, C B, C D, &c. sont aussi égaux entr'eux; parce qu'à cause de l'égalité de ces rayons, ces triangles sont isosceles; ainsi les angles A B C & C B D sont égaux entr'eux *. Donc * *N. 182.*
ils sont chacun la moitié des angles de la circonférence du polygone. D'où il suit,

273. *Que chaque angle de la circonfé-*

rence d'un polygone régulier, comme A B D ou B D H, eſt coupé en deux également par le rayon oblique C B ou C D.

Fig. 132. 274. Ainſi pour trouver le centre C d'un polygone régulier X, il faut couper deux angles de ſa circonférence, comme G A B, & A B D en deux également, & le point de rencontre C, des lignes A C, B C qui diviſent ainſi ces angles, ſera le centre cherché du polygone.

THEORÊME II.

Fig. 133. 275. *L'angle du centre A C B d'un polygone régulier quelconque X, & l'angle de la circonférence D A B du même polygone, joints enſemble, ſont égaux à deux angles droits.*

DEMONSTRATION.

Conſidérez que les trois angles du triangle A C B ſont égaux à deux angles droits *, & que les deux angles de ſa baſe, ſçavoir, C A B, & C B A ſont chacun la moitié de l'angle de la circonférence de ce polygone * : donc ils ſont pris enſemble égaux à cet angle ; mais joints avec l'angle du centre A C B, ils

** N. 177.*
** N. 273.*

valent deux droits : donc l'angle de la circonférence D A B, qui leur est égal, joint à l'angle du centre A C B, vaut aussi deux angles droits. C. q. f. d.

COROLLAIRE.

276. Il suit de cette proposition, que lorsqu'on connoît l'angle du centre d'un polygone régulier, on peut connoître aisément celui de sa circonférence ; car ôtant de 180 degrés l'angle du centre de ce polygone, le reste sera la valeur de celui de la circonférence.

Ainsi l'angle du centre du pentagone étant de 72 degrés, si on l'ôte de 180, il restera 108 degrés pour la valeur de l'angle du centre du pentagone régulier.

On déterminera de la même maniere celui des autres polygones réguliers, & l'on trouvera que l'angle de la circonférence de l'exagone est de 120 degrés, celui de l'eptagone de 128 degrés, celui de l'octogone de 135, &c.

THEORÊME III.

277. *Tous les polygones réguliers différens, mais de même nombre de côtés, ont leurs angles du centre égaux, de même que ceux de la circonférence.*

Cette propoſition eſt évidente ; car les angles du centre des polygones réguliers de même nombre de côtés, ſont les mêmes parties des 360 degrés de la circonférence du cercle ; & ces angles étant égaux, ceux de la circonférence, qui ſont la quantité dont ils different de 180 degrés, le ſont auſſi également. Donc, &c.

THEORÊME IV.

278. *Si du centre C d'un polygone régulier X, & de l'intervalle CA d'un de ſes rayons obliques, on décrit une circonférence,*

Fig. 134. 1°. *Elle paſſera par le ſommet de tous les angles de la circonférence de ce polygone.*

Et 2°. *Elle ſera diviſée par les rayons obliques CA, CB, &c. en autant de parties égales que le polygone a de côtés.*

DEMONSTRATION.

La premiere partie de cette propoſition eſt évidente ; car le centre C étant également diſtant du ſommet de tous les angles de la circonférence du polygone X ; ſçavoir, de l'intervalle du rayon

oblique *, la circonférence qui ſera dé- crite de C pris pour centre, & du rayon C A, doit néceſſairement paſſer par tous les angles B, D, &c. de ce polygone, puiſqu'elle paſſera parto us les points qui ſeront éloignés de C de la longueur C A. * N. 268.

La ſeconde partie l'eſt auſſi également; car tous les angles du centre du polygone, comme A C B, B C D, &c. étant égaux entr'eux *, les parties de la circonférence compriſe entre leurs côtés, & décrite de leur ſommet pris pour centre, ſeront égales entr'elles; mais il y a autant de ces parties que de côtés dans le polygone : donc, &c. * N. 276.

COROLLAIRES.

279. Il ſuit de cette propoſition que pour décrire un polygone régulier quelconque dans un cercle, dont tous les angles en touchent la circonférence, il faut la diviſer en autant de parties égales que le polygone doit avoir de côtés, & que les cordes de ces diviſions donneront les côtés du polygone.

Un polygone comme X, renfermé ou décrit dans un cercle, & dont tous les angles en touchent la circonférence, eſt dit être *inſcrit dans le cercle*, & le cer- Fig. 134.

Cette propoſition eſt évidente ; car les angles du centre des polygones réguliers de même nombre de côtés, ſont les mêmes parties des 360 degrés de la circonférence du cercle ; & ces angles étant égaux, ceux de la circonférence, qui ſont la quantité dont ils different de 180 degrés, le ſont auſſi également. Donc, &c.

THEORÊME IV.

278. *Si du centre C d'un polygone régulier X, & de l'intervalle CA d'un de ſes rayons obliques, on décrit une circonférence,*

Fig. 134. 1°. *Elle paſſera par le ſommet de tous les angles de la circonférence de ce polygone.*

Et 2°. *Elle ſera diviſée par les rayons obliques CA, CB, &c. en autant de parties égales que le polygone a de côtés.*

DEMONSTRATION.

La premiere partie de cette propoſition eſt évidente ; car le centre C étant également diſtant du ſommet de tous les angles de la circonférence du polygone X ; ſçavoir, de l'intervalle du rayon

oblique *, la circonférence qui ſera dé- * N. 268.
crite de C pris pour centre, & du rayon C A, doit néceſſairement paſſer par tous les angles B, D, &c. de ce polygone, puiſqu'elle paſſera parto us les points qui ſeront éloignés de C de la longueur C A.

La ſeconde partie l'eſt auſſi également; car tous les angles du centre du polygone, comme A C B, B C D, &c. étant
égaux entr'eux *, les parties de la cir- * N. 276.
conférence compriſe entre leurs côtés, & décrite de leur ſommet pris pour centre, ſeront égales entr'elles; mais il y a autant de ces parties que de côtés dans le polygone : donc, &c.

COROLLAIRES.

279. Il ſuit de cette propoſition que pour décrire un polygone régulier quelconque dans un cercle, dont tous les angles en touchent la circonférence, il faut la diviſer en autant de parties égales que le polygone doit avoir de côtés, & que les cordes de ces diviſions donneront les côtés du polygone.

Un polygone comme X, renfermé Fig. 134.
ou décrit dans un cercle, & dont tous les angles en touchent la circonférence, eſt dit être *inſcrit dans le cercle*, & le cer-

cle *circonſcrit au polygone* : le corollaire de la propoſition précédente donne donc la méthode générale d'inſcrire un polygone régulier dans un cercle.

THEORÊME V.

Fig. 135. 280. *Si du centre C d'un polygone régulier, & de l'intervalle de ſon rayon droit C A, on décrit un cercle, il touchera par le milieu tous les côtés du polygone, qui ſeront chacun autant de tangentes du cercle.*

DEMONSTRATION.

Conſidérez que les rayons droits de tout polygone régulier ſont égaux en-
*N. 264. tr'eux *, & qu'ils coupent le côté du polygone perpendiculairement & en deux
*N. 263. également *; qu'ainſi le cercle qui ſera décrit du centre du polygone, & de l'intervalle de ſon rayon droit, paſſera par toutes les extrêmités des mêmes rayons : donc il touchera par le milieu chacun des côtés du polygone : mais ces côtés ſont perpendiculaires aux rayons droits du polygone, c'eſt-à-dire, aux rayons du cercle qui a pour rayon le rayon droit, dont ils ſeront autant de tangentes de ce
*N. 146. cercle * : donc, &c.

281. Un polygone régulier, comme BDEF, &c. dont tous les côtés touchent la circonférence du cercle qu'ils renferment, est dit être *circonscrit au cercle*, & le cercle *inscrit dans le polygone*.

REMARQUE.

282. Un polygone régulier BDEF, &c. étant circonscrit à un cercle, il est évident que si l'on tire tous ces rayons obliques CB, CD, CE, &c. ils partageront la circonférence du cercle inscrit, en autant de parties égales que le polygone circonscrit a des côtés: ensorte que si l'on tire les cordes *b d*, *de*, *ef*, &c. de toutes ces parties, on aura un polygone inscrit dans le cercle, de même nombre de côtés que celui qui est circonscrit au même cercle : alors tous les côtés du circonscrit seront des tangentes aux rayons droits du polygone inscrit, prolongés jusqu'à la circonférence du cercle dans lequel il est inscrit, lesquelles tangentes sont terminées de part & d'autre, par le prolongement des rayons obliques du polygone inscrit.

283. D'où il suit qu'un polygone régulier *b d e f* étant inscrit dans un cercle, pour circonscrire au même cercle un po- *Fig. 135.*

lygone régulier d'un même nombre de côtés, il faut prolonger les rayons droits du polygone inſcrit, juſqu'à la rencontre de la circonférence de ce cercle, mener à cette circonférence, par les points où ils la toucheront, des tangentes terminées de part & d'autre par le prolongement des rayons obliques du premier polygone; & que ces tangentes donneront un polygone circonſcrit au cercle du même nombre de côtés que l'inſcrit.

THEORÊME VI.

284. *Le côté de l'exagone régulier inſcrit dans un cercle, eſt égal au rayon de ce cercle.*

Fig. 136. Soit l'exagone régulier A B D E, &c. inſcrit dans le cercle X; je dis que ſon côté AB eſt égal au rayon A C de ce cercle.

DEMONSTRATION.

Tirez le rayon oblique C B qui donnera le triangle C A B, qui a ſes trois angles égaux.

Car comme l'exagone a ſix côtés, ſon angle du centre A C B vaut la ſixieme partie de la circonférence, ou 60 de-

grés * ; les deux autres angles du même * N. 271.
triangle C A B & C B A, ſont égaux entr'eux, à cauſe de l'égalité des rayons obliques C A & C B * : ainſi comme * N. 182.
les trois angles de tout triangle valent 180 degrés *, & que l'angle C en vaut * N. 177.
60, il reſte donc 120 degrés pour les deux angles C A B & C B A, c'eſt-à-dire 60 pour chacun, puiſqu'ils ſont égaux : donc les trois angles du triangle A B C ſont égaux entr'eux : donc ſes côtés le ſont auſſi * : donc le côté * N. 182.
A B de l'exagone eſt égal au rayon C A du cercle dans lequel il eſt inſcrit. C. q. f. d.

THEORÊME VII.

285. *Plus un polygone régulier inſcrit dans un cercle a de côtés, plus ils ſont petits, & plus ils s'approchent de ſa circonférence.*

DEMONSTRATION.

Si l'on inſcrit dans un même cercle *Fig. 137.*
deux polygones, dont le nombre des côtés de l'un ſoit double des côtes de l'autre, comme par exemple, un quarré & un octogone, cette propoſition ſera évidente ; parce que chaque côté du

quarré répondra à deux côtés de l'octogone, qui faisant ensemble une ligne courbée, seront plus grands que le côté du quarré qui les soutient *. Mais pour le démontrer généralement,

* N. 26.

Il faut considérer que les côtés des polygones sont les cordes des parties de la circonférence du cercle dans lequel il est inscrit *. Or plus le polygone a de côtés, plus ces parties sont en grand nombre, & conséquemment plus elles sont petites : donc les côtés du polygone qui les soutiennent ou qui leur servent de cordes, sont aussi plus petits : mais plus les cordes sont petites dans un cercle ou dans des cercles égaux, plus elles sont éloignées du centre du cercle * : donc plus elles s'approchent de sa circonférence.

* N. 279.

* N. 153.

COROLLAIRE.

Il suit de-là :

286. *Que plus un polygone inscrit dans un cercle a des côtés, plus sa circonférence est grande.*

Car il est évident que la circonférence du cercle sera toujours plus grande que celle du polygone inscrit, puisque ses côtés étant des lignes droites, sont plus

petits que les arcs qu'ils ſoutiennent ; mais plus il a de côtés, plus il approche de la circonférence du cercle, ou moins il en differe : donc il eſt plus grand : donc, &c.

THEORÊME VIII.

287. *Plus un polygone régulier circonſcrit à un cercle a de côtés, plus ſa circonférence eſt petite.*

DEMONSTRATION.

Cette propoſition paroîtra évidente, *Fig. 138.* ſi l'on circonſcrit à un cercle deux polygones, dont le nombre des côtés de l'un ſoit double des côtés de l'autre, par exemple, un quarré & un octogone; comme le quarré A B C D & l'octogone *a b c d e*, &c. car il eſt clair que le côté *a b* de l'octogone eſt plus petit que les deux parties *a* A, A *b* du quarré; qu'il en eſt de même à tous les autres angles de ce quarré A D, & que le reſte de l'octogone eſt commun aux deux polygones. D'où il ſuit, que la circonférence du quarré eſt plus grande que celle de l'octogone. Mais pour le démontrer généralement,

Il faut conſidérer que la circonférence

du polygone régulier circonſcrit eſt toujours plus grande que celle du cercle, par cet axiome, que *ce qui contient eſt plus grand que ce qui eſt contenu*; que chaque côté du polygone circonſcrit touche le cercle dans l'extrêmité du rayon droit, c'eſt-à-dire, par le milieu *; mais que plus les côtés du polygone ſont petits, moins ils s'éloignent de ce point de part & d'autre, ou, ce qui eſt la même choſe, plus leurs extrêmités s'approchent de la circonférence du cercle : or plus elles s'en approchent, moins la ſomme des côtés du polygone differe de la circonférence du cercle, c'eſt-à-dire, plus elle eſt petite : mais cette ſomme en approche d'autant plus que les côtés du polygone ſont petits, c'eſt-à-dire, qu'ils ſont en plus grand nombre : donc, &c.

* N. 280.

REMARQUE.

288. Il eſt évident que la circonférence du cercle contenant celle du polygone inſcrit, & étant renfermée dans le circonſcrit, elle eſt plus grande que la circonférence du premier polygone, & plus petite que celle du ſecond : mais comme ces polygones approchent d'autant plus du cercle qu'ils ont un plus

grand nombre de côtés *, si on suppose le nombre de ces côtés infini, ils se confondront alors avec le cercle, dont la circonférence peut ainsi être conçue comme composée d'une infinité de côtés infiniment petits. Dans cette supposition, le cercle devient un polygone régulier d'une infinité de côtés : c'est pourquoi tout ce que l'on démontrera dans la suite sur les polygones réguliers, pourra s'attribuer pareillement au cercle considéré aussi comme polygone.

* N. 285 & 287.

THEORÊME IX.

289. *Tout polygone régulier ou irrégulier Z, peut être partagé par des lignes tirées d'un de ses angles D à ses autres angles A & B, &c. en autant de triangles D F A, D A B, &c. qu'il a de côtés, moins deux côtés.* Fig. 139.

DEMONSTRATION.

Considérez qu'il faut nécessairement deux côtés du polygone pour avoir le premier triangle D F A, de même que le dernier D E C, & que les autres triangles sont composés d'un seul côté du polygone, & des lignes D A, D B, &c. tirées en dedans le polygone. D'où il

suit, que si l'on retranche de la circonférence du polygone les deux côtés D F, & D E qui forment l'angle F D E, du sommet duquel on a tiré les lignes D A, D B, &c. le reste des côtés du polygone donnera le nombre des triangles dans lesquels il aura été partagé : donc il y en aura autant que le polygone a de côtés, moins deux côtés : donc, &c.

COROLLAIRE.

Il suit de cette proposition que

290. *Les angles de tout polygone sont égaux, pris ensemble, à deux fois autant d'angles droits que le polygone a de côtés, moins deux.*

Car on vient de voir que tout polygone peut se partager en autant de triangles qu'il a de côtés, moins deux : or les angles de chacun de ces triangles sont formés de tous ceux du polygone, & ils valent deux droits * : donc les angles du polygone valent deux fois autant d'angles droits qu'on y peut former de triangles par des lignes tirées d'un de ses angles, c'est-à-dire, deux fois autant qu'il a de côtés, moins deux. C. q. f. d.

* *N. 177.*

PROBLEMES.

PROBLEMES.

I.

291. *Inſcrire un quarré dans un cercle donné.*

RESOLUTION.

Soit le cercle donné Z, dont le centre eſt C : tirez deux diametres A B, D E qui ſe coupent perpendiculairement en C; ils diviſeront la circonférence du cercle Z en quatre parties égales : tirez les cordes A D, D B, &c. de chacune de ces parties, & vous aurez le quarré A D B E. *Fig.* 140.

DEMONSTRATION.

Les lignes A D, D B, &c. ſont égales, étant cordes d'arcs égaux *, & les angles A D B, D B E, &c. qui ont leur ſommet à la circonférence du cercle, & qui s'appuient ſur un diametre, ſont droits * : donc, &c. * *N.* 50. * *N.* 160.

I I.

292. *Inſcrire un octogone régulier dans un cercle donné.*

RESOLUTION.

Inſcrivez-y d'abord un quarré par le *Fig.* 141.

problême précédent, & divisez chaque arc que soutient le côté du quarré, en deux également : tirez ensuite des lignes droites d'une division à l'autre, & vous aurez l'octogone demandé ; ce qui est évident.

III.

Fig. 142. 293. *Inscrire un exagone dans un cercle donné, dont le centre est C.*

RESOLUTION.

Tirez le rayon C A du cercle, & le portez six fois sur sa circonférence, il la divisera en six parties égales ; c'est ce qui est évident par la proposition du n°. 284.

IV.

294. *Inscrire un dodécagone dans un cercle.*

RESOLUTION.

Divisez d'abord la circonférence du cercle en six parties égales, comme pour y inscrire l'exagone ; coupez ensuite chaque division en deux également, & tirez des lignes droites d'une division à l'autre, elles donneront le dodécagone inscrit au cercle.

V.

295. *Dans un cercle donné, inſcrire un triangle équilatéral.*

Il faut diviſer ſa circonférence en ſix parties égales, comme pour y inſcrire un exagone, & tirer enſuite des lignes droites de la premiere diviſion à la troiſieme, de celle-ci à la cinquieme, & de la cinquieme à la premiere, & l'on aura le triangle équilatéral 1, 3, 5, inſcrit au cercle; car chaque angle, comme *a*, ayant pour meſure la moitié des deux ſixiemes parties de la circonférence ſur leſquelles il s'appuie, c'eſt-à-dire, un tiers de la demie *, il ſera de 60 degrés: donc, &c. *Fig. 143.* * *N. 157.*

PROBLÊME VI.

296. *Inſcrire un polygone régulier quelconque dans un cercle.*

Trouvez d'abord l'angle du centre de ce polygone, en diviſant 360 degrés par le nombre de ſes côtés *: tirez enſuite deux rayons qui faſſent enſemble un angle égal à celui du centre du polygone: la corde de l'arc compris entre ces deux rayons, ſera le côté du polygone de- * *N. 271.*

mandé; car elle sera la corde de la cinquieme partie de la circonférence, s'il s'agit d'un pentagone, de la sixieme s'il
* N. 279. s'agit d'un exagone, &c. * Ainsi portant cette corde sur la circonférence du cercle, elle la divisera en autant de parties égales que le polygone doit avoir de côtés. Ce qui est évident.

Fig. 144. Pour inscrire, par exemple, un décagone dans un cercle donné Z, dont le centre est C; on cherchera l'angle du centre de ce polygone en divisant 360 degrés par 10, c'est-à-dire, par le nombre des côtés du polygone; le quotient donnera 36 degrés pour la valeur de cet angle: on tirera ensuite les deux rayons CA, CB, de maniere qu'ils fassent l'angle ACB de 36 degrés; la corde AB de cet angle étant portée sur la circonférence du cercle Z, la divisera en 10 parties égales: ainsi tirant des lignes droites d'une division à l'autre, on aura le décagone demandé.

On inscrira de même dans tout cercle donné, tel autre polygone régulier qu'on voudra.

REMARQUE.

I.

297. La méthode qu'on vient de don-

ner dans ce dernier problême, pouvant s'appliquer généralement à tous les polygones, fait voir qu'il y a différentes manieres de diviser la circonférence du cercle en plusieurs parties égales : mais il faut observer que celle-là seule se nomme *Géométrique*, qui fait seulement usage de la regle & du compas, & que les autres qui prescrivent du tâtonnement ou d'autres instrumens, tel que le rapporteur (que la méthode que l'on vient de donner exige pour faire l'angle ACB de la valeur de l'angle du centre du polygone) sont nommées *méchaniques*. Ainsi la résolution des cinq premiers problêmes de cet article est géométrique, & celle du sixieme est méchanique.

II.

298. Lorsque l'on a un polygone régulier inscrit dans un cercle, on peut toujours y inscrire géométriquement un polygone qui ait le double de côtés, en coupant chaque angle du centre en deux parties égales, ce que l'on peut continuer à l'infini ; comme aussi lorsque l'on a un polygone régulier d'un nombre de côtés pair, inscrit dans un cercle, on peut y inscrire un polygone qui ait la moitié des côtés du premier, en tirant des li-

gnes de la premiere division à la troisieme, de celle ci à la cinquieme, &c. ainsi qu'on l'a fait pour inscrire dans un cercle un triangle équilatéral par le moyen de l'exagone, n. 295.

III.

299. Tous les polygones réguliers ne peuvent pas s'inscrire géométriquement dans le cercle : tels sont l'eptagone, l'ennéagone, l'endécagone, &c. & cela, parce qu'on ne peut diviser géométriquement un arc ou la circonférence du cercle en tel nombre de parties impair que l'on veut. Ainsi ces polygones ne peuvent être inscrits dans le cercle que par des moyens méchaniques, c'est-à-dire par la méthode du dernier problême, ou par le tâtonnement, en portant une ouverture de compas sur la circonférence, & l'augmentant ou diminuant, jusqu'à ce que cette ouverture divise la circonférence du cercle en autant de parties égales que le polygone doit avoir de côtés; ou bien en se servant du compas de proportion, instrument dont on a déja parlé. En voici la méthode en peu de mots; on en trouvera la démonstration dans *l'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier*.

PROBLÊME VII.

300. *Maniere d'inſcrire un polygone régulier quelconque dans un cercle, par le moyen du compas de proportion.*

On trouve ſur chaque branche du compas de proportion, & du même côté, deux lignes, le long deſquelles ſont écrits les *polygones*. Ils y ſont marqués depuis le triangle ou le *trigone*, juſqu'au dodécagone.

Pour inſcrire un polygone dans un cercle avec cet inſtrument, il faut prendre avec le compas commun, la grandeur du rayon du cercle, & la porter ſur la ligne des polygones du compas de proportion. Il le faut ouvrir de maniere que la diſtance de 6 à 6 de cette ligne, ſoit égale au rayon du cercle propoſé. Ce compas reſtant ainſi ouvert, ſi on veut inſcrire un eptagone dans le cercle donné, on prendra avec le compas ornaire l'intervalle de 7 à 7 de la ligne des polygones, marquée ſur chaque regle ou branche du compas de proportion; de 9 à 9, ſi l'on veut inſcrire un ennéagone; de 11 à 11, ſi c'eſt un endécagone, &c. Ces intervalles étant portés ſur la circon-

férence du cercle, la diviseront en 7, 9, 11, &c. parties égales.

Si le rayon du cercle donné est trop grand pour pouvoir être porté sur la ligne des polygones, c'est-à-dire, si l'intervalle de 6 à 6 des deux lignes des polygones est dans la plus grande ouverture du compas de proportion, moindre que le rayon du cercle donné; on décrira du centre de ce cercle un autre cercle plus petit, dans lequel on inscrira le polygone demandé; les rayons obliques de ce polygone étant prolongés jusqu'à la circonférence du grand cercle, la diviseront en autant de parties égales que le polygone doit avoir de côtés.

Si le côté du polygone étoit donné, & qu'on voulût trouver le rayon du cercle dans lequel il peut être inscrit, ou, ce qui est la même chose, le rayon oblique du polygone, il faudroit porter ce côté sur les nombres de la ligne des polygones qui lui conviennent, par exemple, sur 5 & 5, si le polygone imposé étoit un pentagone: prenant ensuite l'intervalle de 6 à 6, on auroit le rayon demandé.

PROBLÊME VIII.

301. *Un cercle étant donné, lui cir-*

conſcrire un polygone régulier quelconque.

Soit le cercle Z, dont le centre eſt C, auquel il faut circonſcrire un polygone régulier quelconque, par exemple, un octogone. *Fig. 145.*

RESOLUTION.

On inſcrira d'abord un octogone dans le cercle Z* : on prolongera ſon rayon droit CD juſqu'à la circonférence du cercle en E; on menera par ce point une tangente au cercle, qui ſera terminée de part & d'autre en F & en G par le prolongement des rayons obliques CA, CB : on décrira enſuite du centre C & du rayon CF ou CG, un nouveau cercle, dont FG ſera la huitième partie; enſorte que portant cet intervalle ſur ſa circonférence, il la diviſera en huit parties égales; les cordes de chacune de ces parties étant tirées, donneront l'octogone circonſcrit au premier cercle. Ce qui eſt évident, par ce qui a été expliqué, n. 348.

*N. 292.

PROBLÊME IX.

302. *Un polygône étant inſcrit dans un cercle, en circonſcrire un autre au*

même cercle d'un même nombre de côtés.

Ce problême s'exécutera de la même maniere que le précédent.

PROBLÊME X.

303. *Décrire un polygone régulier quelconque, dont le côté soit égal à une ligne donnée.*

Fig. 146. Soit la ligne donnée A B sur laquelle on veut décrire un polygone quelconque, par exemple un octogone.

RESOLUTION.

Il faut commencer par trouver l'angle du centre de l'octogone, & cela en
* *N. 271.* divisant 360 par * 8, on aura 45 degrés, pour la valeur de cet angle ; on ôtera 45 degrés de 180, le reste 135 sera l'angle de la circonférence de l'octo-
* *N. 275 & 276.* gone *.

Ce petit calcul étant fait, on fera aux points A & B des angles B A C, C B A égaux chacun à la moitié de 135 degrés, ou de l'angle de la circonférence de l'octogone, c'est-à-dire de 67 degrés 30 minutes ; les côtés de ces angles étant prolongés, se couperont dans un point C, qui sera le centre du polygone de-

mandé * : enſorte que ſi de ce point pris * N. 274.
pour centre, & de l'intervalle CA ou CB on décrit un cercle, le côté AB diviſera ſa circonférence en huit parties égales.

REMARQUES.

I.

304. Par ce problême, on peut conſtruire ſur le terrein un polygone régulier quelconque, dont le côté ait un nombre de toiſes fixé ou déterminé.

Car il n'y a qu'à décrire ſur un plan, par le moyen d'une échelle bien exacte, le polygone qu'on veut tracer ſur le terrein, donnant à ſon côté autant de toiſes de l'échelle qu'il doit en avoir ſur le terrein, alors il ſera aiſé de connoître avec l'échelle la grandeur du rayon de ce polygone.

Cette grandeur étant connue, on ſe *Fig. 147.*
tranſportera ſur le terrein avec le demi-cercle, & ſuppoſant que C ſoit choiſi pour le centre du polygone, on fera avec cet inſtrument les angles ACB, BCD, &c. égaux aux angles du centre du polygone; & faiſant les côtés CA, CB, CD, &c. de ces angles, égaux au nombre de toiſes des rayons obliques du

polygone, mesurés sur l'échelle du plan, les lignes A B, B D, &c. tirées par les extrêmités des rayons obliques, donneront les côtés du polygone demandé. Ce qui est évident.

II.

305. Au défaut du demi-cercle, on peut résoudre le même problême avec la planchette dont on a déja parlé n. 104, & suivans.

Fig. 148. Il s'agit d'avoir le polygone qu'on veut tracer sur le terrein, exactement dessiné sur le papier, comme dans la remarque précédente, par le moyen d'une échelle : il faut l'attacher sur la planchette, & la mettre au point C, où doit être le centre du polygone; mettre ensuite une épingle bien perpendiculairement sur la planchette au centre C du polygone, & de même à tous ses angles A, B, D, &c.

Cela fait, il faut faire planter des piquets dans la campagne, dans l'alignement des deux épingles qui donnent les rayons obliques du polygone, & faire mesurer sur ces alignemens les lignes C*a*, C*b*, C*d*, &c. égales au nombre de toises que les rayons obliques doivent avoir sur le terrein; les

lignes, comme *a b*, *b d*, &c. tirées par les extrêmités de ces rayons, donneront les côtés du polygone.

III.

306. Si une ligne comme AB étoit donnée sur le terrein pour le côté d'un polygone régulier, & que le milieu de ce polygone se trouvât embarrassé de maison ou autrement, on pourroit circonscrire, pour ainsi dire, le polygone autour de cet espace, en faisant au point B avec la ligne AB, l'angle ABD égal à l'angle de la circonférence du polygone, & ensuite BD égal à AB; puis au point D, un autre angle égal encore au précédent, & continuer ainsi l'opération jusqu'à ce que le dernier côté du polygone se réunisse avec le premier au point A. *Fig. 147.*

Cette opération demande une grande exactitude dans la mesure des angles: elle ne peut se faire avec précision sur le terrein qu'avec un instrument dont les degrés soient assez grands pour être divisés de cinq en cinq minutes, ou au moins de 10 en 10.

PROBLÊME XI.

307. *Faire une figure égale & sembla-* *Fig. 149.*

ble à une figure donnée ABCDE, ou, ce qui est la même chose, qui ait le même nombre de côtés, & le même nombre d'angles égaux, chacun à chacun; ensorte que ces deux figures étant posées l'une sur l'autre, puissent se couvrir exactement.

RESOLUTION.

Il faut partager en triangles la figure donnée, & cela, par des lignes tirées d'un de ses angles D aux autres angles A & B.

On tirera après cela une ligne *ab* égale à A B, sur laquelle on construira le trian. *adb* égal à A D B: on fera ensuite sur *bd* le triangle *dcb* égal à D C B, & enfin sur *ad* le triangle *aed* égal au triangle A E D; ce qui étant fait, il est évident que les trois triangles, qui composent le polygone *abcde*, sont égaux aux trois qui composent le proposé A B-
N. 190. C D E, & qu'ainsi ces deux figures ou ces deux polygones, sont égaux.

PROBLÊME XII.

308. *Faire le plan d'un polygone quelconque, donné sur le terrein.*

On appelle le *plan* d'une figure ou

d'un polygone tracé ſur le terrein, un deſſein qui le repréſente en petit, & qui en fait connoître toutes les dimenſions.

Soit le polygone A B C D E un terrein quelconque, dont on veut faire ou *lever* le plan, c'eſt-à-dire, prendre toutes les meſures néceſſaires pour le deſſiner ſur le papier. *Fig. 150.*

RESOLUTION.

On le partagera en triangles par des lignes imaginaires tirées d'un de ſes angles D, aux autres angles, comme dans le problême précédent.

On fera à vue ſur un papier, une eſquiſſe ou brouillon de la figure; on y marquera toutes les lignes imaginées tirées dans le polygone, & qui le partagent en pluſieurs triangles. On meſurera toutes ces lignes ſur le terrein, de même que celles qui forment le contour ou la circonférence du polygone, & l'on écrira leur valeur ſur chacune des mêmes lignes marquées dans le brouillon.

Pour mettre ce brouillon ou mémorial au net, on fera d'abord une échelle, dont la grandeur ſera relative à celle qu'on veut donner au plan; on conſtruira avec cette échelle des triangles ſur le

papier, dont les côtés auront autant de toiſes, pieds & pouces de l'échelle, que les côtés de ceux qu'ils repréſenteront auront été trouvés en avoir du terrein : l'aſſemblage de tous ces triangles donnera le plan du terrein ou ſa figure réduite en petit.

Par exemple, ſuppoſons qu'ayant meſuré le côté A B, on l'ait trouvé de 100 toiſes, le côté A D de 60, & B D auſſi de 100 toiſes.

Pour rapporter ce triangle ſur le papier, on fera une échelle ſur laquelle on prendra 100 toiſes, qu'on portera ſur une ligne indéfinie de *a* en *b* : on prendra après cela 60 toiſes de la même échelle pour le côté A D; puis du point *a*, pris pour centre, & de l'intervalle de 60 toiſes, on décrira un arc indéfini vers *d*; & comme le côté B D du triangle A D B eſt auſſi de 100 toiſes, on prendra 100 toiſes ſur l'échelle du point *b* pris pour centre, & de cet intervalle on décrira un ſecond arc qui coupera le premier dans un point *d*, duquel tirant les lignes *d a*, *d b*, on aura le triangle *a d b* du papier, qui répondra au triangle A D B du terrein.

On rapportera de la même maniere les deux autres triangles A E D, B D C, &

l'on aura le plan *abcdea* du polygone proposé A B C D E A.

REMARQUE.

309. Si l'on ne peut pas entrer dans le polygone A B C D E A pour en lever le plan, on pourra le prendre en dehors, en mesurant tous ses côtés A B, B C, &c. & tous les angles A B C, B C D, &c. qu'ils font entr'eux. *Fig. 150.*

Pour rapporter sur le papier le mémorial ou le brouillon de l'opération, on tirera une ligne *a b* à laquelle on donnera la même quantité de toises de l'échelle, que la ligne A B a été trouvée en avoir sur le terrein : à ses extrêmités *a* & *b* on fera des angles *a b c*, *b a c* égaux aux angles A B C, B A E du terrein, & l'on donnera aux lignes *a e*, *b c* la quantité des toises, des lignes A E, B C. Au point *c* on fera l'angle *b c d* égal à B C D, puis le côté *c d* égal à C D ; étant parvenu en *d*, on fera l'angle *c d e* égal à CDE, & le côté *d e*, égal au côté D E du terrein ; & enfin en tirant *e a* on aura le plan *a b c d e a* pris ou levé extérieurement, & rapporté sur le papier.

C'est ainsi qu'on peut lever le plan d'un bois ou de quelqu'autre figure dans laquelle on ne peut entrer.

Maniere d'examiner si l'on ne s'est point trompé dans la mesure des angles de la circonférence d'une figure dont on leve le plan.

Pour vérifier si l'on ne s'est point trompé en mesurant les angles du polygone :

Il faut les additionner tous ensemble ; & voir si leur somme donne deux fois autant d'angles droits que le polygone a
*N. 290. *de côtés , moins deux.* *

Fig. 150. Par exemple , dans le polygone ABCDEA qui a cinq côtés , la somme de ses angles doit valoir six angles droits , ou 540 degrés ; de sorte que si , en les additionnant , on trouve une quantité plus ou moins grande de degrés , c'est une marque qu'il y a de l'erreur dans leur mesure : alors il faut les mesurer de nouveau , jusqu'à ce qu'on soit parvenu à trouver pour leur somme le nombre 540 , qu'ils doivent donner.

REMARQUE.

Fig. 151. 310. Il faut observer que cette vérification ne peut ainsi se faire , que lorsque les angles du polygone sont tous saillans. Lorsqu'il y en a de rentrans , comme l'angle ABC dans le polygone

Z; il faut, au lieu de l'angle ABC, comprendre dans la ſomme des angles de ce polygone la quantité des degrés dont ABC differe de la circonférence ou de 360 degrés.

Suppoſant, par exemple, que l'angle ABC ait été meſuré de 80 degrés, on ôtera 80 de 360, & on ajoutera le reſte 280 à la ſomme de tous les autres angles du polygone; alors tous ſes angles doivent valoir deux fois autant d'angles droits qu'il a de côtés, moins deux.

S'il y avoit pluſieurs angles rentrans dans le polygone, on feroit pour chacun d'eux ce que l'on vient de preſcrire pour l'angle ABC.

311. Comme il eſt fort aiſé de ſe tromper en voulant lever le plan d'une figure par le moyen de ſes angles, on ne le fait guere que lorſqu'on ne peut entrer dans la figure : quand on le peut, voici la maniere dont on y procede ordinairement.

Soit le polygone irrégulier ABCD, &c. dont on veut lever le plan, & dans lequel on ſuppoſe qu'on peut entrer.

On tirera dans le polygone une ligne AH ſelon ſa plus grande dimenſion, elle s'appellera *la baſe*. *Fig. 152.*

De tous les angles ſaillans & rentrans

du polygone, on fera tomber de part & d'autre ſur cette baſe des perpendiculaires BO, CP, DQ, &c. autant qu'il ſera néceſſaire; la figure ſera alors partagée en trapezes, triangles, &c.

Il faudra meſurer la baſe AH, & toutes ſes parties AO, OP, &c. de même que toutes les perpendiculaires, dont il faudra écrire la valeur ſur l'eſquiſſe ou le brouillon du plan.

Pour rapporter ce brouillon ſur le papier, on fera d'abord une échelle, & on tirera une ligne *ah* pour la baſe du plan: on lui donnera autant de toiſes de l'échelle que AH s'eſt trouvée en contenir ſur le terrein.

On prendra enſuite *ao* du nombre de toiſes, pieds & pouces de AO, meſurés ſur le terrein. Au point *o* on élevera la perpendiculaire *ob*, & on lui donnera autant de toiſes de l'échelle que OB en contient du terrein.

On fera après cela *op* du même nombre de toiſes que OP, & on élevera au point *p* la perpendiculaire *pc* égale aux toiſes de PC, & l'on continuera ainſi l'opération, juſqu'à ce que l'on ait élevé de part & d'autre *ah* autant de perpendiculaires qu'il y en a de part & d'autre de la baſe AH du plan, eſpacées

comme ſur ce plan, & de la même quantité de toiſes de l'échelle, qu'elles ont de toiſes ſur le terrein : on tirera enſuite des lignes qui joindront toutes les extrêmités de ces perpendiculaires, & l'on aura le plan de ce polygone ABCD, &c. rapporté ou deſſiné ſur le papier.

Les perpendiculaires BO, CP peuvent ſe tracer ſur le terrein avec le demi-cercle, comme on l'a dit n. 124.

312. La méthode que l'on vient de donner peut ſervir auſſi pour lever le plan d'un mur qui a pluſieurs angles, & qui a même des parties courbes, comme des tours, &c.

Car ſoit le mur AB ; on tirera vis-à-vis une baſe CD, ſur laquelle on fera tomber des perpendiculaires de tous les angles du mur, & de toutes ſes parties courbes. On fera enſuite ſur le papier une figure ſemblable, de la même maniere que dans l'exemple précédent ; ce qui n'a pas beſoin d'un plus grand détail. *Fig. 153.*

313. On obſervera ſeulement que les parties courbes ſeront déterminées d'autant plus exactement, qu'on prendra des points plus proches les uns des autres, ſur ces parties, pour, de ces points, faire tomber des perpendiculaires ſur la baſe. *Fig. 154.*

Fig. 154. 314. On aura encore de la même maniere les ſinuoſités d'une riviere, ou le contour d'un bois, comme on le voit, fig. 154.

Fig. 155. 315. On peut auſſi avoir le plan d'une figure fort irréguliere, dans laquelle on ne peut ou veut entrer, & dont le terrein des environs eſt d'un accès facile, en inſcrivant la figure dans un rectangle ou dans un autre polygone quelconque, & en tirant enſuite de toutes ſes parties ſaillantes & rentrantes, des perpendiculaires ſur les côtés du rectangle ou du polygone : tel eſt, par exemple, le polygone irrégulier X renfermé dans le rectangle *abcd*.

La maniere de rapporter cette figure ſur le papier eſt trop aiſée pour la détailler ici; elle doit ſe concevoir ſans aucune difficulté, après tout ce qui a été dit ci-devant ſur ce ſujet.

Des différentes manieres de repréſenter un objet propoſé.

316. Après avoir parlé du plan, il paroît convenable de donner une idée des autres deſſeins dont on ſe ſert dans l'architecture, tant civile que militaire, pour repréſenter toutes les parties des

ouvrages conſtruits ou qu'on veut conſtruire.

317. *Le plan* dont on a déja parlé, peut ſe conſidérer comme le deſſein de la coupe d'un ouvrage, faite parallélement à l'horizon, un peu au deſſus du rez-de-chauſſée. Si on ſuppoſe un bâtiment, dont tous les murs ſoient élevés de deux ou trois pieds au deſſus du rez-de-chauſſée, le deſſein de ce bâtiment, dans cet état, en ſera le plan. Il fera voir la diſtribution de toutes les parties du terrein, l'épaiſſeur des murs, &c.

318. *Le profil* eſt un deſſein qui repréſente la coupe d'un ouvrage, faite perpendiculairement à l'horizon. Il ſert à faire connoître la hauteur de toutes les parties de l'ouvrage, qui ſe trouvent dans la coupe, de même que la profondeur de celles qui ſont au deſſous de l'horizon. Il ſuit de cette définition, que le profil varie, ſuivant les différentes coupes qu'on imagine dans l'ouvrage, & que pour en bien connoître toutes les parties, il faut des profils pris de différens ſens.

319. *L'élévation* eſt le deſſein de la partie extérieure d'un ouvrage.

320. Le plan, le profil, & l'élévation ſont néceſſaires pour faire connoître

exactement la distribution & la situation de toutes les parties d'un ouvrage. Les deux premiers le sont le plus indispensablement, & ils sont presque seuls en usage dans la fortification.

321. Il y a encore une quatrieme méthode pour représenter un objet ; elle se nomme *perspective* : c'est la représentation de l'objet tel qu'il paroît vu d'une certaine distance. Ce dessein ne représente pas toutes les parties des ouvrages dans leur grandeur naturelle, il fait seulement juger de l'effet qu'elles font ensemble ; ainsi il ne sert pas à le faire connoître exactement : par cette raison, on ne s'en sert guere dans les ouvrages de la fortification.

XII.

De la Planimétrie ou mesure des surfaces planes.

322. LA *planimétrie* est la partie de la Géométrie qui enseigne à mesurer la *superficie* des figures planes ; cette superficie se nomme aussi l'*aire* ou la *surface* de ces figures.

323. Comme les lignes se mesurent avec

avec d'autres lignes plus petites, comme avec la toise, le pied, &c. de même les superficies se mesurent avec d'autres superficies déterminées, comme *la toise quarrée, le pied quarré*, &c.

324. Une toise quarrée est un quarré, dont chaque côté est d'une toise, & un pied quarré un quarré dont chaque côté est d'un pied, & de même pour toutes les autres mesures quarrées.

On verra bientôt ce qui a fait choisir le quarré pour mesurer les surfaces préférablement aux autres figures.

Proposition fondamentale pour la mesure des surfaces.

THEORÊME I.

325. *La surface de tout rectangle, comme A B C D, est égale au produit d'un de ses côtés A B, par l'autre côté A C ou B D, qui fait un angle droit avec le premier.*

DEMONSTRATION.

Il faut considérer le rectangle A B C D comme rempli d'une infinité de lignes égales & paralleles à A B, ou plutôt de petits parallélogrammes d'une hauteur *Fig. 156.*

infiniment petite, & qui ont tous pour base des lignes égales & paralleles à AB; il faut concevoir qu'ils se touchent sans aucun intervalle; alors on verra qu'on en peut seulement imaginer autant qu'il y a de points dans la hauteur AC ou BD du rectangle ABDC. Ainsi si on suppose, par exemple, cent mille points dans cette hauteur, la ligne AB étant ajoutée cent mille fois à elle-même, ou prise autant de fois qu'il y a de points dans BD, donnera le rectangle AD; mais multiplier une quantité par une autre, *c'est prendre la premiere autant de fois que l'unité est contenue dans la seconde*. Donc prendre AB autant de fois qu'il y a de points ou d'unité dans BD, c'est multiplier AB par BD: donc en multipliant AB par BD, on a le produit du rectangle AD: donc la surface d'un rectangle est égale au produit d'un de ses côtés par l'autre. C. q. f. d.

THEORÊME II.

Fig. 157. 326. *Si l'on multiplie les toises de la base d'un rectangle AC par celles de sa hauteur BC ou AD, le produit donnera la quantité de toises quarrées que contiendra le rectangle.*

Soit le côté A B de sept toises, on le divisera en toises, c'est-à-dire en sept parties égales, & par l'extrêmité de chacune de ces parties, on menera des paralleles à A D ou B C, elles seront toutes perpendiculaires sur A B *; ainsi elles formeront sept réctangles qui auront chacun une toise pour base, & pour hauteur celle du rectangle, c'est-à-dire A D ou A C. * *N.* 134.

Soit supposé aussi que B C est de six toises, & que par l'extrêmité de chacune de ces toises, on mene des paralleles à la base AB du rectangle AC; il est évident que ces paralleles diviseront les sept premiers rectangles en six parties égales, c'est-à-dire, en six toises quarrées; car chacune de ces parties a une toise de base, & une toise de hauteur: il y aura donc dans le rectangle AC sept fois six toises quarrées, c'est-à-dire, quarante-deux; mais ce nombre est le produit des toises de la base du rectangle AC par celles de sa hauteur BC: Donc, &c.

COROLLAIRE.

327. *Il suit delà, que pour avoir la surface d'un quarré, il faut mul iplier sa base, ou un de ses côtés par lui-même.*

Car le quarré peut être consideré comme un rectangle qui a ses quatre côtés égaux. Or, pour avoir la surface de ce rectangle, il faut multiplier sa base par sa hauteur *; mais ces deux lignes sont égales dans le quarré : Donc, &c.

* *N. 325.*

REMARQUE.

I.

328. Lorsque l'on multiplie deux lignes, qui font ensemble un angle droit, ou, ce qui est la même chose, lorsque l'on multiplie les nombres qui expriment la valeur de ces lignes, leur produit donne la surface d'un rectangle qui auroit ces lignes pour côtés; & de même lorsqu'on multiplie un nombre par lui-même, son produit donne la surface d'un quarré qui auroit ce nombre pour côté.

D'où il suit, qu'une toise quarrée ayant six pieds de base, & autant de hauteur, contient six fois six pieds quarrés, c'est-à-dire trente-six, & qu'un pied quarré ayant douze pouces de base & autant de hauteur, contient douze fois douze pouces quarrés, c'est-à-dire 144, &c. Ainsi pour réduire ou changer des toises quarrées en pieds quarrés, il faut les multiplier par trente-six, & pour sça-

voir le nombre de toises quarrées que valent des pieds quarrés, il faut les diviser par trente-six : il en est de même pour les pouces quarrés qu'on change en pieds quarrés, en les divisant par 144, ou pour les pieds quarrés qu'on réduit en pouces aussi quarrés, en les multipliant par le même nombre 144.

I I.

329. La toise quarrée, le pied quarré, &c. se divisent, dans le calcul, en même nombre de parties que la toise linéaire, c'est-à-dire, qui n'a que de la longueur, le pied linéaire, &c.

Ainsi la toise linéaire se divisant en six parties égales, appellées pieds, la toise quarrée se divise aussi en six parties égales, qu'on appelle *pieds courant sur toise*.

Le pied courant sur toise est un rectangle qui a une toise de base, & un pied de hauteur : Ainsi il contient six pieds quarrés. Il est évident que la toise quarrée contient six de ces pieds.

Le pied courant sur toise se divise comme le pied linéaire, en douze parties égales, appellées *pouces courant sur toise*. Ce sont des rectangles d'une toise de base, & d'un pouce de hauteur, dont

par conſéquent douze ſont le pied courant ſur toiſe.

Le pouce courant ſur toiſe ſe diviſe auſſi en *douze lignes courant ſur toiſe*; ce ſont des rectangles d'une toiſe de baſe, & d'une ligne de hauteur.

Le pied quarré ſe diviſe comme le pied linéaire en douze parties égales, appellées *pouces courant ſur pied*; ce ſont des rectangles d'un pied ou douze pouces de baſe, & d'un pouce de hauteur.

Le pouce quarré ſe diviſe auſſi en douze *lignes courant ſur pouce*, qui ſont des rectangles d'un pouce de baſe, & d'une ligne de hauteur.

Cette diviſion des meſures quarrées en même nombre de parties égales que les meſures linéaires, donne une grande facilité dans le calcul des ſuperficies, lorſque les toiſes ſont accompagnées de pieds, pouces, &c. On va le voir dans l'exemple qu'on va donner ici de la multiplication de deux dimenſions compoſées de toiſes, pieds & pouces.

330. *Maniere de multiplier des toiſes, des pieds & des pouces, par des toiſes, des pieds & des pouces.*

Fig. 158. Soit le rectangle ABCD, dont la baſe

AB soit de 15 toises cinq pieds sept pouces, & la hauteur BC de 13 toises quatre pieds dix pouces, pour en avoir la superficie; il faut multiplier ces deux lignes l'une par l'autre.

Pour cela on posera d'abord celui de ces deux nombres qu'on voudra, par exemple, celui qui exprime la valeur de AB, & l'on écrira dessous celui de la valeur de BC.

On enfermera les cinq pieds sept pouces du multiplicande par une espece de crochet, comme on le voit dans l'exemple figuré; & l'on fera la multiplication des 15 toises restant par le multiplicateur 13 toises 4 pieds 10 pouces, comme on l'a enseigné dans l'article de la multiplication, n. 48, & suivans, du Traité d'Arithmétique.

A B.	15 t. [5 pieds 7 pouces.				
B C.	13 —	4 —	10		
	45				
	15.				
Pour 3 pieds du Multiplicat.	7 —	3			
Pour 1 pied du même.	2 —	3			
Pour 6 pouces du même. . . .	1 —	1 —	6		
Pour 4 pouces du même	0 —	5 —	0		
Pour les 3 pieds du Multiplicande.	6 —	5 —	5		
Pour les 2 pieds restant du même.	4 —	3 —	7 —	4	
Pour 6 pouces du même. . . .	1 —	0 —	10 —	10	
Pour 1 pouce du même. . . .	0 —	1 —	1 —	9 —	8
TOTAL.	219 t.	5 p.	6 p.	11 l.	8

Pour cet effet on dira d'abord, trois fois 5 font 15, on posera 5 à la colonne des unités, & l'on retiendra une pour la suivante, on dira ensuite, trois fois 1 font 3, & 1 de retenu font 4, & l'on posera 4 à la seconde colonne.

Puis passant au second chiffre 1 du multiplicateur, on dira, une fois 5 est 5, qu'on posera à la seconde colonne, & après cela, une fois 1 est 1, qu'on posera à la troisieme.

Pour les quatre pieds du multiplicateur, on prendra d'abord pour trois pieds la moitié des 15 toises du multiplicande, en disant, la moitié de 15 est 7, qu'on posera à la colonne des unités; il reste une toise, dont la moitié est 3 pieds courant sur toise, qu'on posera aux pieds, c'est-à-dire, dans la colonne des pieds du multiplicande & du multiplicateur.

Pour le pied qui reste, on prendra le tiers de ce que les trois pieds précédens viennent de donner: Ainsi on dira, le tiers de 7 est 2, qu'on posera sous le 7; il reste une toise qui vaut 6 pieds courans, lesquels joints avec les trois pieds qui sont à la colonne des pieds & qui viennent du produit précédent, font 9 pieds, dont le tiers est 3, qu'on posera

aussi à la même colonne des pieds.

Il reste à prendre le produit des dix pouces du multiplicateur.

Pour six pouces, on prendra la moitié du produit du pied précédent.

On dira donc, la moitié de 2 est 1, qu'on posera sous le 2; puis, la moitié de trois pieds est un pied, qu'on posera aux pieds; il reste un pied dont la moitié est six pouces courans sur toise.

Pour les quatre pouces qui restent, on prendra le tiers du même produit d'un pied, c'est-à-dire, de deux toises 3 pieds, qui est cinq pieds courant sur toise; alors on a tous les différens produits qui formeront celui de 15 toises par 13 toises 4 pieds dix pouces.

Il s'agit présentement d'opérer pour les cinq pieds sept pouces du multiplicande, qu'on a jusqu'à présent laissé à l'écart, ou qu'on n'a point considéré.

Leur produit doit se prendre sur tout le multiplicateur; car il est clair que si l'on a une ligne BC de 13 toises 4 pieds 10 pouces à multiplier par une toise, le produit donnera 13 toises quarrées, plus 4 pieds courans sur toise, & plus 10 pouces courans sur toise : Or, si au lieu d'une toise il faut multiplier cette même ligne BC par des parties aliquotes *Fig. 158.*

de la toiſe, comme par la moitié ou le tiers, &c. il eſt évident que ces parties doivent produire la moitié ou le tiers, &c. de treize toiſes 4 pieds 10 pouces.

Les cinq pieds du multiplicande n'étant point partie aliquote de la toiſe, ne peuvent ſe prendre tout d'un coup ſur le multiplicateur : on commencera donc par prendre la moitié de ce multiplicateur pour trois pieds, & pour cela on dira,

La moitié de 13 eſt 6, & on poſera 6 à la colonne des unités de la toiſe : il reſte une toiſe qui vaut 6 pieds, qu'on joindra avec les 4 pieds du multiplicateur, ce qui donnera dix pieds, dont la moitié eſt cinq pieds courans ſur toiſe : on prendra auſſi de ſuite la moitié des 10 pouces du multiplicateur, qui eſt 5, qu'on poſera à la colonne des pouces.

Pour les deux pieds reſtant du multiplicande, on prendra le tiers du multiplicateur auſſi tout entier.

Ainſi on dira, le tiers de 13 eſt 4, qu'on poſera aux unités des toiſes : il reſte une toiſe qui, jointe avec les quatre pieds du multiplicateur, fait 10 pieds, dont le tiers eſt 3 pouces pour 9 ; il reſte un pied qui vaut douze pouces, qu'on

ajoute avec les 10 pouces du multiplicateur, ce qui donne 22 pouces, dont le tiers eſt 7; il reſte un pouce qui vaut 12 lignes courantes ſur toiſe, & dont le tiers eſt quatre lignes de cette eſpece.

Pour les 7 pouces qui reſtent au multiplicande, on prendra pour 6, le quart de ce que le produit précédent de deux pouces a donné.

On dira donc, le quart de 4 toiſes eſt une toiſe, qu'on poſera aux unités des toiſes; puis, le quart de trois pieds eſt zero à la colonne des pieds; mais ces pieds valent 36 pouces courans ſur toiſe, qui joints avec les 7 pouces du même produit de deux pieds, font 43 pouces, dont le quart eſt 10; il reſte 3 pouces qui valent 36 lignes, qui jointes aux 4 lignes du produit de deux pieds, font 40 lignes, dont le quart eſt 10, qu'on poſera à la colonne des lignes.

Il reſte à opérer ſeulement pour 1 pouce, ce qui doit donner la ſixieme partie du produit de 6 pouces.

Ainſi on dira, la ſixieme partie d'une toiſe eſt zero, qu'on poſera aux toiſes; mais cette toiſe vaut ſix pieds courans, dont la ſixieme partie eſt un pied courant ſur toiſe, qu'on poſera aux pieds: il n'y a rien à lui ajouter, parce qu'il

n'y a pas de pieds au produit de ſix pouces. On dira enſuite; la ſixieme partie de 10 pouces eſt un pouce, qu'on poſera à la colonne des pouces : il en reſtera 4 qui valent 48 lignes, leſquelles jointes avec les 10 lignes du produit de ſix pouces font 58 lignes, dont la ſixieme partie eſt 9 lignes pour 54; il reſte 4 lignes qui valent 48 points, dont la ſixieme partie eſt 8 points, qu'on poſera à la colonne des points. On additionnera enſuite tous les différens produits qu'on vient de faire; leur ſomme 219 toiſes quarrées, 5 pieds, 6 pouces, 11 lignes, 8 points courans ſur toiſe, ſera la valeur de la ſurface du rectangle ABCD.

DEMONSTRATION.

Pour le prouver, conſidérez que la baſe AB du rectangle ABCD étant de 15 toiſes 5 pieds 7 pouces; ſi on prend AE, de 15 toiſes, il reſtera EB de 5 pieds 7 pouces : menez EF parallélement à BC, & prenez EG du nombre des toiſes de BC, c'eſt-à-dire, de 13; il reſtera GF de 4 pieds 10 pouces : menez auſſi HG parallele à AB ou à DC.

Cette préparation étant faite; il eſt évident que le rectangle AG eſt le pro-

duit des toises de la base A B par celles de BC. Il est évident aussi que le rectangle HF est le produit des toises de HG (qui est égal à AE) par FG, c'est-à-dire, par les pieds & par les pouces du multiplicateur. Or, si FG avoit été d'une toise, le rectangle HF auroit contenu autant de toises quarrées, que la base AE ou HG a de toises de longueur, c'est-à-dire, dans cet exemple 15 toises quarrées; supposant GF de trois pieds. On doit donc avoir la moitié de 15 toises quarrées, c'est-à-dire, sept toises & demie, comme on l'a trouvé dans le calcul : un pied de plus de hauteur a donc dû donner le tiers de 7 toises 3 pieds; & 10 pouces, la moitié & le tiers du produit d'un pied. Ainsi le rectangle HF est composé du produit de 15 toises par trois pieds, plus du tiers du même produit, & enfin de la moitié & du tiers du produit d'un pied.

Il reste le rectangle EC qui acheve le rectangle total AC. Il est évident qu'il est le produit de BC par BE, c'est-à-dire, de tout le multiplicateur 13 toises 4 pieds 10 pouces par les cinq pieds 7 pouces du multiplicande A B.

Si B E valoit une toise, le rectangle EC contiendroit autant de toises quar-

rees qu'il y en a dans la hauteur BC, & autant de pieds & de pouces courans sur toise, qu'il y en auroit dans la même hauteur. Or, si au lieu d'une toise, BE n'avoit que trois pieds, le rectangle EC seroit la moitié de 13 toises 4 pieds 10 pouces courans sur toise, le tiers de cette même quantité, s'il n'avoit qu'un pied, &c. ainsi qu'on l'a dit ci-devant.

D'où l'on voit que les pieds & les pouces du multiplicande doivent se prendre sur toutes les parties du multiplicateur.

On peut donc établir cette regle générale pour toutes les multiplications de cette espece.

331. *Qu'il faut prendre les pieds & les pouces, &c. du multiplicateur, sur les toises du multiplicande; & les pieds, les pouces, &c. du multiplicande sur toutes les parties du multiplicateur.*

L'exemple précédent & la démonstration qu'on vient d'en donner, paroissent suffisans pour mettre en état de trouver les produits de tous les différens rectangles qu'on pourra proposer.

On ajoutera seulement, que lorsqu'il y aura des pouces dans le multiplicateur



ou dans le multiplicande, ſans qu'il y ait un produit de pieds, ſur lequel on puiſſe prendre celui des pouces, on ſuppoſera le produit d'un pied ou de deux pieds, comme on ſuppoſe dans la multiplication des livres, ſols & deniers, le produit d'un ſol ou de deux ſols pour avoir le produit des deniers, &c.

PROBLÊME. III.

332. *Les parallélogrammes qui ont une même baſe, & qui ſont entre les mêmes paralleles, ſont égaux.*

Soient les parallélogrammes ABCD, ABEF, qui ont AB pour baſe commune, & qui ſont entre les mêmes paralleles AH, DE; il faut démontrer qu'ils ſont égaux. *Fig. 155.*

DEMONSTRATION.

Conſidérez que les deux triangles DAF, CBE, ſont égaux; car les côtés oppoſés des parallelogrammes étant égaux *, AD eſt égal à BC, comme AF l'eſt à BE, DC & FE, ſont chacun égaux à AB par la même raiſon. Donc ils ſont égaux entr'eux: ainſi en leur ajoutant la même ligne CF, on aura ** N. 238.*

DF égal à CE : donc les trois côtés des deux triangles DAF, CBE, sont égaux : donc ces triangles sont aussi
*N. 190. égaux *.

Présentement si on retranche de chacun de ces triangles, le triangle CGF qui leur est commun, il restera au premier le trapeze AGCD, qui sera égal
*N. 8. au reste BGFE du second triangle *, & ajoutant à ces deux restes le même triangle AGB, on a les deux parallélogram-
*N. 9. mes composés de deux parties égales *, & par conséquent égaux : donc, &c.

COROLLAIRES.

I.

Si le premier parallélogramme ABCD est rectangle, le second qui est oblique lui sera toujours égal. D'où il suit,

333. *Qu'un parallélogramme oblique quelconque est égal à un rectangle de même base & de même hauteur.*

II.

Fig. 160. 334. *Que pour avoir la superficie d'un parallélogramme oblique, comme ABCD, il faut multiplier sa base AB par sa hauteur DE.*

Car le rectangle auquel ce parallelogramme oblique est égal, auroit pour base AB, & pour côté une ligne égale à la perpendiculaire DE, & sa superficie seroit égale au produit de ces deux lignes *. Donc puisque l'oblique ABCD est égal à ce rectangle, il a la même superficie, c'est-à-dire, celle qui résulte du produit de sa base AB par sa hauteur DE. * N. 325.

REMARQUES.

I.

335. Il est évident que plus l'angle DAB, que font ensemble les deux côtés AD & AB du parallélogramme, sera petit, ou qu'il différera de l'angle droit, & plus la perpendiculaire DE sera petite ; car si on suppose que cet angle devienne BA*d*, le côté A*d* sera plus incliné sur AB, & par conséquent son extrêmité *d* sera alors plus proche de la base AB, que lorsque cette même extrêmité étoit en D : donc la perpendiculaire *de* sera plus courte que DE : mais le parallélogramme est toujours égal au produit de sa base par sa hauteur. Donc lorsque cette hauteur diminue, la superficie diminue aussi.

336. D'où il suit, 1°. Que ce n'est

point la longueur ſeule des côtés du parallélogramme oblique qui décide de ſa ſuperficie, mais qu'il faut y ajouter auſſi la conſidération des angles ; car ſes côtés reſtant les mêmes, ſa ſuperficie varie, s'il arrive du changement dans ſes angles.

337. 2°. Que les côtes d'un parallélogramme étant déterminés, il aura plus de ſuperficie lorſqu'ils ſeront perpendiculaires les uns aux autres, c'eſt-à-dire, lorſqu'il ſera rectangle, que lorſqu'il ſera oblique; car alors il ſera égal au produit de ſes deux côtés différens, au lieu qu'étant oblique, il n'eſt que le produit d'un de ſes côtés par la perpendiculaire abaiſſée de celui qui lui eſt oppoſé, laquelle eſt toujours plus petite que le côté du parallélogramme incliné ſur la baſe.

Fig. 161. 338. 3°. Que quand on ſçauroit qu'un parallélogramme oblique contiendroit un certain nombre de lozanges, dont chaque côté ſeroit d'une toiſe, on ne connoîtroit pas pour cela ſa ſuperficie, parce qu'il faudroit encore connoître l'angle que font les côtés pour évaluer la perpendiculaire qui donneroit la hauteur du lozange, & qui en feroit enſuite trouver la ſuperficie. Le quarré n'ayant

pas cet inconvénient, sa mesure est fixe & déterminée, & c'est par cette raison qu'on l'emploie à déterminer celle des autres figures.

339. 4°. Que comme toutes les figures se mesurent avec le quarré, les lignes que l'on multiplie ensemble pour en avoir la superficie, doivent être perpendiculaires l'une à l'autre; car sans cela leur produit ne donneroit point des quarrés, mais des lozanges, dont la valeur n'est pas déterminée par celle du côté; ainsi qu'on vient de le démontrer.

I I.

340. Comme il n'y a que les rectangles & les quarrés qui puissent être divisés en quarrés égaux par des paralleles menées à leur côtés, pour avoir la superficie des autres figures, il faut qu'elles puissent se trouver égales à un quarré ou à un rectangle de la même maniere que le parallélogramme oblique a été trouvé égal au rectangle de même base & de même hauteur; car alors en trouvant celle de ces rectangles, on a la superficie des figures qui leur sont égales.

I I I.

341. Les parallélogrammes qui sont

entre les mêmes paralleles, ont la même hauteur; car elle n'est autre chose que la perpendiculaire abaissée entre leurs
* N. 235. côtés paralleles *; mais entre les mêmes paralleles, les perpendiculaires sont éga-
* N. 127. les *: d'où il suit, que c'est la même chose de dire que *des parallélogrammes ont la même hauteur, ou qu'ils sont entre les mêmes paralleles.*

I V.

342. Lorsqu'on dit que deux figures sont égales, il ne s'ensuit pas pour cela qu'elles soient terminées de la même maniere, mais seulement qu'elles ont la même superficie. Ainsi un triangle est égal à un quarré, s'il a autant de superficie que le quarré. On dit qu'elles sont *égales & semblables*, lorsqu'étant imaginées posées les unes sur les autres, elles se couvrent exactement.

THEORÊME IV.

343. *Les parallélogrammes qui ont des bases égales, & qui sont entre les mêmes paralleles, sont égaux.*

DEMONSTRATION.

Fig. 162. Soient les parallélogrammes X & Y

renfermés entre les mêmes paralleles A B, C D, dont les bases E F, G H, sont égales ; il faut démontrer qu'ils sont égaux.

Pour cela, considérez qu'ils sont égaux chacun à un rectangle de même base & de même hauteur *, & qu'à cause de l'égalité des bases & de la hauteur de ces parallélogrammes, ce rectangle est le même pour l'un & pour l'autre. Donc ils sont égaux chacun à des rectangles égaux. Donc ils sont égaux entr'eux *. C. q. f. d. * *N.* 333. * *N.* 10.

THEORÊME V.

344. *Les triangles qui ont la même base, & qui sont renfermés entre les mêmes paralleles, sont égaux.*

Soient les triangles A C B, A D B qui ont la même base A B, & qui sont renfermés entre les mêmes paralleles A E, C D, je dis qu'ils sont égaux. *Fig.* 163.

DEMONSTRATION.

Considérez que ces deux triangles sont chacun la moitié des parallélogrammes de même base & de même hauteur *, lesquels sont égaux par la propo- * *N.* 239.

ſition précédente : or, les moitiés de choſes égales, ſont égales. Donc, &c.

345. On démontrera de la même maniere que les triangles qui ont des baſes égales, & qui ſont entre les mêmes paralleles, ſont égaux.

COROLLAIRE.

I.

346. Puiſqu'un triangle eſt la moitié d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur, & que pour avoir la ſuperficie d'un parallélogramme, il faut multiplier ſa baſe par ſa hauteur, il s'en ſuit que pour avoir celle du triangle, *il faut multiplier ſa baſe par la moitié de ſa hauteur, ou ſa hauteur par la moitié de ſa baſe*, ceux deux produits étant évidemment égaux.

Fig. 164. Si donc on ſuppoſe la baſe du triangle A C B de 13 toiſes 4 pieds, & ſa hauteur C D de 18 toiſes 9 pouces, multipliant A B par la moitié de C D, ou par C D tout entier, & prenant enſuite la moitié du produit, cette moitié ſera la ſurface du triangle A C B qu'on trouvera de 123 toiſes 5 pieds 1 pouce 6 lignes.

	13 t. { 4 pieds.
	18 — 0 — 9 pouc.
	104
	13.
Faux prod. d'un pied...	2 — 1 — 0
	1 — 0 — 6
	0 — 3 — 3
	9 — 0 — 4 — 6
	3 — 0 — 1 — 6
TOTAL ...	247 toi. 4 p. 3 p. 0
dont la moitié est ...	123 — 5 — 1 — 6

COROLLAIRE. II.

347. Il suit encore de la même proposition, *qu'un triangle est égal à un parallélogramme de même base, mais dont la hauteur est la moitié de celle du triangle.*

Car en multipliant la base du triangle par la moitié de sa hauteur, on a le produit d'un parallélogramme, qui a pour base celle du triangle, & pour hauteur la moitié de la hauteur du même triangle: or ce produit donne la surface du triangle *, & celle de ce parallélogramme: donc, &c. * *N. 345.*

On démontrera de la même maniere,

348. Qu'un triangle est égal à un parallélogramme, l'orsqu'ayant sa base une fois plus grande que celle du parallélogramme, il a la même hauteur.

THEORÊME VI.

349. Un trapeze est égal à un parallélogramme, qui a pour base une ligne égale à la moitié de ses deux côtés paralleles, & pour hauteur la perpendiculaire tirée entre les mêmes côtés.

Préparation pour la démonstration.

Fig. 165. Soit le trapeze A B C D, dont A B & C D sont les deux côtés paralleles. On menera du point C, C E parallele à A D: on coupera E B en deux également en F, & l'on menera F G parallele à E C, terminée en G par le prolongement de D C. On aura alors le parallélogramme A F G D qui a pour base A F, moitié des deux côtés paralleles A B, D C du trapeze; car A E est égale à D C, à cause du parallélogramme A E C D *; E F est la moitié de E B qui est la différence des deux côtés paralleles. Donc A F est la moitié de la somme de ces deux côtés: ce parallélogramme a pour hauteur la perpendiculaire tirée entre les deux côtés paralleles du trapeze, puisqu'il a pour

* N. 236.

côtés opposés ces deux mêmes côtés. Il faut prouver qu'il est égal au trapeze.

DEMONSTRATION.

Considérez que pour former le parallélogramme A F G C, on retranche du trapeze le triangle F I B, qui est égal au triangle C G I; car C G est égal à E F *, qui est aussi égal à F B; l'angle B F I est égal à l'angle I G C, parce qu'ils sont alternes *; les angles I B F & I C G sont égaux par la même raison : donc ces deux triangles ont chacun un côté égal, & les angles sur ce côté égaux chacun à chacun : donc ils sont égaux * : donc ce qu'on ajoute, pour former le parallélogramme A G est égal à ce qu'on retranche du trapeze : donc ce parallélogramme est égal au trapeze : donc, &c.

* *N. 236.*
* *N. 135.*
* *N. 193.*

COROLLAIRE.

350. Il suit de cette proposition que, pour avoir la superficie d'un trapeze, il faut additionner ensemble ses deux côtés paralleles, prendre la moitié de leur somme, & la multiplier par la perpendiculaire tirée entre ces mêmes côtés.

THEORÊME VII.

351. *La superficie de tout quadrilatere*

est égale à celle des deux triangles, dans lesquels sa diagonale le partage.

Fig. 166. Cette proposition est évidente; car si l'on a le quadrilatere irrégulier A B C D, pour en avoir la superficie, on tirera la diagonale A C, & ensuite des points B & D on abaissera sur cette ligne les perpendiculaires E D, B F, qui seront les hauteurs des triangles A D C, A B C. On multipliera après cela A C par la moitié de D E, ce qui donnera la surface du triangle D A C; puis A C par la moitié de B F; ce qui donnera l'autre triangle A C B; la somme de la superficie de ces deux triangles sera celle du quadrilatere.

THEORÊME VIII.

352. *Tout polygone régulier est égal à un triangle qui a pour base sa circonférence, & pour hauteur son rayon droit, ou la perpendiculaire abaissée du centre du polygone sur un de ses côtés.*

Fig. 167. Soit le pentagone régulier X, il faut démontrer que sa superficie est égale à celle du triangle A C H, dont la base A H est supposée égale à la circonférence du pentagone, & qui a pour hauteur

CD, qui eſt le rayon droit du pentagone.

DEMONSTRATION.

Tirez les rayons obliques de ce polygone; ils le partageront en autant de triangles qu'il a de côtés, leſquels ſeront égaux entr'eux, & au triangle ACB*: *N. 268.* portez AB ſur AH autant de fois que le polygone a de côtés, c'eſt-à-dire, dans cet exemple, cinq fois, ou quatre fois de B en H; par chaque point de diviſion, E, F, &c. tirez les lignes CE, CF, &c. alors le triangle ACH contiendra autant de triangles que le polygone X; mais tous ces triangles ſont chacun égaux au triangle ACB qui appartient en même-temps au polygone, & au triangle AC-H; car toutes leurs baſes ſont égales à AB, & ils ont pour hauteur la perpendiculaire CD, abaiſſée de leur ſommet commun C ſur leur baſe, ou le prolongement de leurs baſes*: donc le *N. 345.* triangle ACH eſt compoſé d'autant de triangles égaux que le polygone X; mais ils ſont tous égaux à ceux de ce polygone, puiſqu'ils le ſont à ACB: donc ſa ſuperficie eſt égale à celle du polygone X: donc, &c.

Il eſt clair que cette démonſtration eſt

la même pour toute autre forte de polygone régulier d'un plus grand nombre de côtés.

REMARQUE.

On a tiré par le centre C du polygone une parallele à AH, & l'on a construit sur la base de chaque triangle BCE, ECF, &c. du triangle total ACH, des triangles égaux & semblables à ACB, pour rendre la démonstration plus sensible ; chaque triangle oblique, comme ECF, étant égal au triangle E*b*F, construit sur la même base & entre les paralleles AH & C*d*.

COROLLAIRE I.

Il suit de cette proposition,

353. *Qu'un cercle quelconque Z, est égal à un triangle CAB, qui a pour base sa circonférence, & pour hauteur son rayon CA.*

Fig. 168. Car le cercle peut être conçu ou considéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés *, sur lesquels le
*N. 288. rayon est perpendiculaire, puisqu'il l'est à toutes les tangentes du cercle, qui sont
*N. 147. le prolongement de ses petis côtés * ;

donc par la propoſition précédente, il eſt égal à un triangle qui a pour baſe ſa circonférence, & pour hauteur ſon rayon. C. q. f. d.

COROLLAIRE II.

354. Il ſuit encore de la même propoſition, que pour avoir la ſuperficie d'un polygone régulier quelconque, il faut multiplier ſa circonférence par la moitié de ſon rayon droit ; car pour avoir la ſuperficie du triangle égal au polygone, il faut multiplier ſa baſe par la moitié de ſa hauteur * : or ſa baſe eſt la circonférence du polygone, & ſa hauteur eſt ſon rayon droit : donc, &c. **N. 346.*

Pour trouver le rayon droit d'un polygone régulier & donné, on peut s'y prendre de cette maniere.

Il faut d'abord faire une échelle de toiſes, dont les toiſes ſoient aſſez grandes pour ſe diviſer au moins en pieds.

On tirera enſuite une ligne indéfinie ſur laquelle on prendra autant de toiſes, de pieds, &c. que le côté du polygone en contient. Cette ligne étant ainſi déterminée, on fera, avec le rapporteur, à une de ſes extrêmités, des angles égaux à la moitié de celui de la circon-

férence du polygone. Les côtés de ces angles étant prolongés, se couperont dans un point; abaissant une perpendiculaire de ce point sur le côté du polygone. Pour en connoître la valeur, on le portera sur l'échelle: le nombre de toises, pieds, &c. qu'il en contiendra, sera celui des toises, pieds, &c. du rayon droit du polygone proposé.

355. Comme le cercle peut se considérer comme un polygone régulier d'une
N. 288. infinité de côtes, il faut, pour avoir sa superficie, multiplier sa circonférence par la moitié de son rayon, ou le quart de son diametre.

COROLLAIRE III.

356. Il suit de ce qui précede qu'un polygone régulier ou un cercle, est égal à un parallélogramme qui auroit pour base la moitié de la circonférence du polygone ou du cercle, & pour hauteur le rayon droit du premier, ou le rayon du second.

Car un parallélogramme, dont la base n'est que la moitié de celle d'un triangle, & dont la hauteur est la même, est
N. 348. égal au triangle: donc, &c.

REMARQUE.

357. La ſuperficie du cercle, & celle de toutes les autres figures curvilignes ou mixtilignes, ſe nomme leur *quadrature*, parce qu'elle ne peut être connue qu'en la rapportant à des figures rectilignes, dont la meſure commune eſt le quarré. Ainſi chercher la quadrature d'une figure bornée de lignes courbes, c'eſt chercher ſa ſuperficie: enſorte que la quadrature du cercle ne conſiſte qu'à meſurer le cercle exactement. On vient de voir qu'il eſt égal à un triangle, qui a pour baſe ſa circonférence, & pour hauteur ſon rayon: comme la ſuperficie d'un tel triangle paroît fort aiſée à trouver, on pourroit croire que celle du cercle, auquel ce triangle eſt égal, doit être connue depuis long-temps: mais il faut obſerver que pour trouver la ſuperficie du triangle égal au cercle, il faut connoître ſa circonférence: ſi elle étoit connue, la quadrature du cercle ne ſeroit plus un problême à réſoudre; c'eſt dans ſa détermination exacte & géométrique que conſiſte la difficulté de cette quadrature: elle n'eſt pas encore connue, quoiqu'elle ait été l'objet des recherches des plus

grands Géometres de l'antiquité, & même de plusieurs modernes.

Si la circonférence du cercle étoit égale à celle de l'exagone inscrit, elle seroit trois fois plus grande que le diametre ; car le côté de l'exagone étant égal au
* N. 284. rayon *, sa circonférence vaut six rayons ou trois diametres. D'où il suit, que le diametre est le tiers de la circonférence de l'exagone : mais la circonférence du cercle est plus grande que celle de ce polygone, chacun de ces côtés étant plus petit que l'arc qu'il soutient : on voit par-là que le diametre est plus petit que le tiers de la circonférence du cercle.

358. *Archimede*, célebre Géometre de Syracuse, qui vivoit il y a environ 1970 ans, ayant inscrit & circonscrit au même cercle un polygone de 96 côtés, trouva que le diametre du cercle étant divisé en sept parties égales, sa circonférence contient environ 22 des mêmes parties, c'est-à-dire, *que le diametre est à la circonférence du cercle, à peu près comme 7 est à 22.*

359. D'où il suit, que le diametre d'un cercle étant connu en mesures quelconques, comme toises, pieds & pouces, &c. on peut trouver ce que sa cir-

conférence contient des mêmes meſures; car que le diametre ſoit diviſé en autant de parties que l'on voudra, il aura toujours le même rapport avec la circonférence du cercle. Ainſi la comparaiſon des ſept parties du diametre avec les 22 de ſa circonférence eſt la même que celle du même diametre partagé ou meſuré en toiſes, pieds & pouces, &c. avec les toiſes, pieds & pouces que valent la circonférence.

360. De ſorte qu'on peut dire, *comme le diametre diviſé en ſept parties, eſt à ſa conférence, qui vaut 22 des mêmes parties, ainſi le diametre diviſé en toiſes, pieds & pouces, &c. eſt aux toiſes, pieds & pouces de ſa circonférence.*

Ce qui fait voir que lorſque le diametre d'un cercle eſt connu, il ne faut faire qu'une ſimple regle de trois (1), pour trouver ſa circonférence.

Par exemple, ſuppoſons qu'on propoſe de trouver la circonférence d'un cercle, dont le diametre a 28 toiſes; on la trouvera par cette regle de trois. 7. 22 :: 28. x. On trouvera pour x, c'eſt-à-dire, pour le quatrieme terme de cette

(1) Voyez la maniere de faire cette regle, N°. 119, du Traité d'Arithmétique.

regle qui représente la circonférence du cercle dont il s'agit, 88 toises.

Ainsi on aura la superficie de ce cercle en multipliant 88 par la moitié du rayon, ou le quart du diametre 28 qui
* N. 355. est 7 *.

361. Si on connoît la circonférence d'un cercle, & quon veuille déterminer par son moyen le diametre, il est évident qu'il ne faut que renverser la regle de trois.

Par exemple, supposant que la circonférence du cercle précédent qu'on a trouvée de 88 toises, soit connue, & que ce soit le diametre de ce cercle qu'il faille trouver; on mettra 22 pour le premier terme de la regle; 7, pour le second, & la circonférence 88 le troisieme; le quatrieme terme qu'on trouvera, sera le diametre demandé.

$22 . 7 :: 88 . x.$

Faisant la regle, on trouvera 28 pour la valeur de x, ou pour le diametre du cercle dont il s'agit.

Si on suppose que la terre soit sensiblement ronde, comme les expériences le font voir, & que la valeur d'un degré du cercle qui en détermine le tour, soit de 25 lieues, on aura pour sa circonfé-

rence 360 fois 25 lieues, c'eſt-à-dire 9000. Suppoſons qu'on veuille, par le moyen de cette connoiſſance, détermi-ner le diametre de la terre ou celui du cercle dont nous venons de parler, on le fera par cette regle de trois.

22. 7 : : 9000. x.

Faiſant cette regle on trouvera 2863 lieues pour ſon quatrieme terme, ou pour le diametre de la terre.

362. On appelle *Secteur* une partie de cercle ACB compriſe entre deux rayons CA, CB, & un arc AB. *Fig. 169.*

THEORÊME IX.

363. *Tout ſecteur eſt égal à un triangle qui a pour baſe une ligne égale à l'arc du ſecteur, & pour hauteur le rayon du cercle dont le ſecteur fait partie.*

DEMONSTRATION.

Soit le ſecteur ACB : il faut démontrer qu'il eſt égal au triangle DEF, qui a pour baſe une ligne EF égale à l'arc du ſecteur, & pour hauteur la ligne DE égale au rayon du même arc.

Pour cela, conſidérez que le ſecteur peut être conçu comme compoſé d'une

infinité de petits triangles égaux A C *a*, *a* C *b*, &c. dont les baſes A *a*, *a b*, &c. ſont infiniment petites, & qui ont pour hauteur commune, le rayon C A du ſecteur; conſidérez de même que le triangle E D F peut être partagé en autant de triangles E D *c*, *c* D *d*, &c. qu'il y en a dans le ſecteur, en imaginant ſa baſe E F diviſée dans le même nombre de parties égales que l'arc ſecteur. Or tous ces petits triangles ayant des baſes & des hauteurs
*N. 315. égales, ſont égaux entr'eux *, & à ceux dont le ſecteur eſt compoſé. Dans cet état, le triangle & le ſecteur ſont compoſés de même nombre de triangles égaux : donc ils ſont égaux : donc, &c.

COROLLAIRE.

Il ſuit delà,

364. *Que pour avoir la ſuperficie d'un ſecteur, il faut multiplier l'arc qui lui ſert de baſe par la moitié de ſon rayon.*

Car pour avoir la ſuperficie du triangle D E F qui eſt égal au ſecteur, il faut multiplier ſa baſe E F par la moitié
*N. 316. de D E * : or E F eſt égale à l'arc du ſecteur par la ſuppoſition, & D E l'eſt à ſon rayon : donc, &c.

REMARQUE.

365. Pour trouver la ſuperficie du ſecteur, ſi ſon arc eſt donné en degrés, ou, ce qui eſt la même choſe, ſon angle A C B, il faut réduire d'abord cet arc en toiſes.

Pour cela, il faut que le rayon A C ſoit connu; alors le diametre du cercle, dont le ſecteur fait partie, ſera auſſi connu, puiſqu'il vaut deux rayons.

On trouvera la circonférence du cercle du ſecteur par la connoiſſance de ſon diametre, ainſi qu'on vient de l'enſeigner *. Après quoi on fera, pour trouver l'arc du ſecteur, une regle de trois, dont les deux premiers termes ſeront les degrés de la circonférence, & ceux de l'arc du ſecteur; le troiſieme ſera la circonférence en toiſes; le quatrieme terme de cette regle donnera les toiſes de l'arc du ſecteur: car il eſt évident que comme la circonférence en degrés eſt à l'arc du ſecteur en degrés, ainſi les toiſes de 360 degrés de la circonférence ſont aux toiſes de l'arc du ſecteur.

* N. 360.

Par exemple, ſuppoſons l'arc du ſecteur de 60 degrés, & le rayon A C de 14 toiſes, le diametre du cercle du ſec-

teur vaudra 28 toiſes; on aura la circonférence de ce cercle par cette regle de trois; 7 . 22 : : 28 . *x* : ce terme ſera trouvé de 88 toiſes.

A préſent on fera cette ſeconde regle de trois. 370 degrés eſt à 60 degrés comme 88, nombre des toiſes de la circonférence, eſt aux toiſes de l'arc de 60 degrés.

Or 360. 60 : : 88. *x*.

Faiſant cette regle, on trouvera pour le quatrieme terme, ou pour les toiſes de l'arc A B, 14 toiſes 4 pieds.

Préſentement pour avoir la ſuperficie du même ſecteur, il faut multiplier 14 toiſes 4 pieds par la moitié de ſon rayon, c'eſt-à-dire par 7; le produit ſera la ſuperficie demandée.

Fig. 170. 366. On appelle *ſegment*, une partie de cercle compriſe entre un arc & ſa corde.

Telle eſt la partie A C B A compriſe entre l'arc A C B & ſa corde A B.

367. On a la ſuperficie d'un ſegment, lorſque l'on connoît le rayon A D du cercle auquel il appartient, & le nombre des degrés de ſon arc, en trouvant d'abord celle du ſecteur D A C B, & retranchant enſuite de ce ſecteur la ſuperficie du triangle A C B; il eſt évident

que le reste sera la superficie du segment.

Soit par exemple le rayon A D de 21 toises, la corde A B de 30, & la perpendiculaire D E de 14 toises 4 pieds 2 pouces; enfin soit l'angle A D B de 100 degrés.

On cherchera d'abord la superficie du secteur A C B D. Pour cela, on déterminera la circonférence du cercle qui a pour rayon celui du secteur. On trouvera 132 toises pour cette circonférence.

On cherchera aussi la valeur de l'arc A C B de 100 degrés. On la trouvera de 36 toises 4 pieds.

On multipliera cet arc par le rayon A D, & l'on prendra la moitié du produit 770, qui donnera 385 toises pour la superficie du secteur.

Arc A C B . .	36 toif. 4 pieds.
Rayon	21 .
	36
	72 .
Pour 3 pieds	10 — 3
Pour 1 pied	3 — 3
TOTAL . .	770 toises.
Moitié . . .	385 toises.

Le secteur ACBD étant ainsi connu, on cherchera la superficie du triangle ABD, en multipliant AB par DE, & prenant la moitié du produit, on aura 220 toises, 2 pieds, 6 pouces pour ce triangle.

AB....	30 toises.
DE....	14 tois. 4 pi. 2 pou.
	120
	30.
Pour 3 pieds	15
Pour 1 pied	5
Pour 2 pouces	0 — 5
Produit total	440 — 5 — 0
Dont la moitié est	220 tois. 2 pi. 6 pou.
Du secteur ACBD ...	385 tois. 0 pi. 0 pou.
Otant le triangle ABD	220 — 2 — 6
Il reste pour le segment ACBA	164 tois. 3 pi. 6 pou.

De la mesure des figures irrégulieres.

368. On mesure les figures irrégulieres en les partageant en parallélogrammes, triangles, trapezes, &c. Pour le faire plus commodément, on peut lever le plan de la figure que l'on veut mesurer, & la partager après cela en parties

qui puiſſent être meſurées. La ſomme de toutes les figures dans laquelle la figure propoſée aura été diviſée, donnera évidemment ſa ſuperficie. Mais pour opérer avec juſteſſe de cette maniere, il faut que le plan ſoit levé très-exactement, & qu'il ſoit conſtruit ſur une échelle aſſez grande pour que les pieds y ſoient au moins des grandeurs ſenſibles.

REMARQUE.

I.

369. On ſçait en général que l'*arpentage* n'eſt autre choſe que l'art de meſurer les terres, bois, &c. Or, avec les principes qu'on vient de donner, on peut meſurer toutes ſortes de ſuperficies planes ; on peut donc ainſi arpenter ou meſurer tous les terreins différens qu'on pourra propoſer.

370. On donne le nom d'arpentage à l'art de meſurer les terres, parce qu'elles ſe meſurent ordinairement avec l'*arpent*.

371. L'arpent eſt une meſure quarrée qui contient toujours *cent perches quarées* ; mais la valeur de la perche n'eſt pas partout la même. Dans les environs de Paris, elle a 18 pieds de long ; dans les eaux & forêts, elle en a 22, &c.

La perche quarrée de 18 pieds de long, a 324 pieds quarrés, celle qui a 22 pieds de longueur a 489 pieds de ſuperficie.

372. Lorſque l'on n'a point de perche pour meſurer un terrein qu'on veut évaluer en arpent, on peut le meſurer avec la toiſe, & ſçachant ce que ſa ſuperficie contient de toiſes quarrées, on trouvera aiſément ce qu'elle contient d'arpens, en diviſant les toiſes quarrées du terrein, par le nombre des toiſes quarrées que contient l'arpent.

373. Par exemple, ſuppoſant que dans un lieu où la ſuperficie a 18 pieds de long, on ait pour la ſuperficie d'un terrein 57800 toiſes quarrées.

Il faut ſçavoir combien l'arpent contient de toiſes quarrées lorſque la perche a 18 pieds.

La perche ayant dix-huit pieds, elle a trois toiſes de longueur, ainſi elle contient neuf toiſes quarrées. L'arpent qui contient cent perches quarrées contient donc 900 toiſes quarrées : donc en diviſant 67800 toiſes par 900, le quotient donnera le nombre d'arpens contenus dans ce nombre de toiſes. On en trouvera 64.

II.

374. Dans tout ce qu'on a dit ſur la planimétrie, on a ſuppoſé les ſuperficies abſolument planes; mais comme il y en a peu de cette eſpece, il faut obſerver que lorſqu'on eſt obligé de meſurer des terreins inégaux, on rapporte ordinairement au terrein horizontal les lignes qu'on meſure ſur ces ſortes de ſuperficies.

Par exemple, ſi dans le terrein AB il ſe trouve l'élévation X, il eſt évident qu'en meſurant la ligne courbe CLB, on aura une ligne plus grande que l'horizontale CB qu'on veut avoir; c'eſt pourquoi pour avoir cette ligne CB exactement, il faut planter des piquets perpendiculairement le long de la montagne, comme CD, EF, &c. de maniere que l'extrêmité D du premier piquet réponde perpendiculairement au pied E de l'autre, ainſi de ſuite. Alors il eſt évident que la ſomme de toutes les lignes horizontales DE, FH, &c. donnera la longueur de CB, qu'on meſurera de cette maniere horizontalement, ſans que l'élévation X cauſe aucune erreur dans ſa meſure. *Fig. 171.*

On obſervera à l'occaſion de la remarque précédente,

375. Que si l'on veut sçavoir quelle est la superficie de la montagne X, il faut la considérer comme composée de plusieurs superficies planes, dont il faut mesurer, selon le penchant de la montagne, les lignes qui les terminent.

THEORÊME X.

376. *Dans tout triangle rectangle, le quarré de l'hypoténuse est égal aux quarrés des deux autres côtés pris ensemble.*

Fig. 172. Soit le triangle rectangle ACB dont l'angle ACB est droit, il faut démontrer que le quarré ABFE fait sur l'hypoténuse AB, est égal au quarré BN fait sur le côté CB, plus au quarré AM fait sur le côté AC.

DEMONSTRATION.

Du sommet C de l'angle droit abaissez C D perpendiculairement sur E F, elle partagera le quarré AF en deux rectangles quelconques AD & BD: Or, si l'on fait voir que le rectangle AD est égal au quarré AM, & le rectangle BD au quarré BN, il est évident qu'on aura démontré la proposition dont il s'agit.

Pour cela, tirez CE, CF, HB, & AG, & considérez que le triangle AEC est la moitié du rectangle AD, parce qu'il a même base AE, & qu'il est entre les mêmes paralleles AE, CD *. * N. 239.

Considérez aussi que le triangle HAB a même base HA, que le quarré AM, & qu'il est entre les mêmes paralleles HA, MB : donc * il est la moitié de ce quarré. * N. 239.

Il faut faire voir à présent que le triangle AEC est égal au triangle HAB ; car le premier étant la moitié du rectangle AD, & l'autre celle du quarré AM, si ces deux moitiés sont égales, le rectangle & le quarré seront égaux.

Le côté AE du triangle AEC est égal au côté AB de HAB, parce qu'ils sont côtés du même quarré *, le côté AC du premier est aussi, par la même raison, égal au côté HA du second. De plus, l'angle CAE du premier est égal à l'angle HAB du second, parce qu'ils sont chacun composés d'un angle droit & du même angle CAB ; donc ces deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, & les angles compris par ces deux côtés égaux : donc ils sont égaux * : donc le rectangle AD est égal au quarré AM. * N. 229. * N. 192.

On démontrera de la même maniere

que le triangle CBF eſt égal au triangle ABG ; & comme le premier eſt la moitié du rectangle BD, & le ſecond la moitié du quarré BN, ce rectangle eſt égal au même quarré BN : donc puiſque les deux rectangles AD & BD valent le quarré de l'hypoténuſe AB, & qu'ils ſont égaux aux deux quarrés AM & BN, qui ont pour côtés les deux côtés CA & CB qui forment l'angle droit du triangle ABC, le quarré de l'hypoténuſe AB eſt égal au quarré des deux autres côtés. C. q. f. d.

COROLLAIRES.

I.

Fig. 173. 377. On peut, par le moyen de cette propoſition, faire un quarré égal à deux autres quarrés donnés A & B ; car faiſant un angle droit CDE, qui ait ſon côté CD égal au côté du quarré A, & l'autre DE égal à celui de B, tirant la ligne CE, on aura un triangle rectangle CDE dont le quarré qui aura pour côté l'hypoténuſe CE, ſera par la propoſition qu'on vient de démontrer, égal aux quarrés des deux autres côtés CD & DE, c'eſt-à-dire, aux deux propoſés A & B.

II.

378. On peut auſſi par la même propoſition faire un quarré double, triple, quadruple, &c. d'un autre quarré.

Il s'agit pour cela de faire un triangle, dont chacun des côtés de l'angle droit ſoient égaux à celui du quarré donné : le quarré qui aura pour côté l'hypoténuſe de ce triangle, ſera double du quarré propoſé *; & ſi l'on prend cette hypoténuſe & un des côtés du quarré donné, pour les deux côtés de l'angle droit d'un autre triangle rectangle, il eſt évident que le quarré fait ſur l'hypoténuſe de ce dernier triangle, ſera triple du quarré propoſé. * N. 376.

En ſuivant cette méthode on aura un quarré quadruple, quintuple, &c. d'un autre.

REMARQUE.

379. Il faut bien prendre garde de croire que pour faire un quarré double d'un autre, il ſuffit de doubler ſon côté.

Soit le quarré ABCD dont on veut avoir un quarré double. Si l'on prend EF double de AB, & que l'on faſſe ſur cette ligne le quarré EG, il ſera quadruple de ABCD. *Fig. 174.*

Pour le prouver, il n'y a qu'à couper EF en deux en I, & élever IL parallélement au côté HE ou GF, & couper de même HE en deux parties égales en M, & mener MN parallele à EF ou HG. Il eſt évident que l'on trouvera alors dans le quarré EFGH quatre quarrés égaux chacun au propoſé ABCD: ainſi comme en doublant le côté on a quadruplé la ſuperficie, il s'enſuit,

380. Que les ſuperficies ne ſont point entr'elles dans la même raiſon que leurs circonférences, & par conſéquent que pour doubler ou tripler une figure, il ne s'agit point de doubler ou tripler ſon côté.

XIII.

Des Solides.

381. Nous avons appellé *Corps* ou *Solide*, l'étendue conſidérée ſelon la longueur, la largeur & la profondeur.

Les extrêmités des corps ſont les ſurfaces, comme les extrêmités des ſurfaces ſont les lignes, & celles des lignes les points.

382. Une ligne eſt perpendiculaire à un

un plan, lorſqu'elle fait des angles droits avec toutes les lignes du plan ſur leſquelles elle tombe.

383. Deux plans ſont paralleles, lorſque les perpendiculaires tirées ent'reux ſont égales.

384. Lorſque deux plans ſe coupent, ou qu'ils ſe rencontrent, ils le font dans une ligne droite commune à l'un & à l'autre plan : cette ligne ſe nomme *la commune ſection de ces plans.*

385. Un plan eſt perpendiculaire ou oblique à un autre plan, ſelon l'angle que font enſemble les perpendiculaires tirées ſur ces plans, par un point de leur commune ſection. Ainſi deux plans qui ſe rencontrent ne font qu'un angle plan : mais ſi plus de deux plans ſe rencontrent dans un point, *comme au coin d'un dez à jouer*, ils font un angle appellé *angle ſolide* : cet angle eſt composé de trois *angles plans* au moins, c'eſt-à-dire, de trois angles tracés ſur trois plans différens.

386. On appelle *pyramide*, un corps entouré de triangles dont les ſommets ſe rencontrent dans un même point, & dont les baſes forment une figure plane rectiligne, qu'on nomme *la baſe* de la pyramide. Tel eſt le corps ABCDE, *Fig.* 175.

entouré des triangles ABE, ABC, &c. dont tous les ſommets ſe rencontrent au point A, & dont les baſes forment le quadrilatere BCDE, qui eſt la baſe de la pyramide.

387. L'angle ſolide A de la pyramide, ſe nomme ſon *ſommet*, & la ligne AF, abaiſſée perpendiculairement du ſommet de la pyramide ſur le plan de ſa baſe, exprime la hauteur de cette pyramide.

388. Lorſque la pyramide a pour baſe un triangle, elle ſe nomme *triangulaire*; *quadrilatere*, ſi elle a pour baſe un quadrilatere, & ainſi de ſuite, ſelon la figure de ſa baſe.

389. La pyramide eſt *droite* ou *oblique*. Elle eſt droite ſi la perpendiculaire abaiſſée de ſon ſommet ſur ſa baſe, paſſe par le centre de cette baſe; autrement elle eſt oblique.

Il ſuit delà que la pyramide droite a toujours pour baſe un polygone régulier; car il n'y a que cette eſpece de polygone qui ait un centre, & que toute pyramide qui a pour baſe un polygone régulier, n'eſt pas droite pour cela ſeulement, mais qu'il faut encore que la perpendiculaire abaiſſée du ſommet de la pyramide ſur ſa baſe, paſſe par le centre de cette baſe.

390. Si la base de la pyramide est un cercle, elle peut être considérée comme entourée d'une infinité de petits triangles, qui tous ensemble font une superficie courbe B A C, & cette pyramide ainsi arrondie, se nommé *cône*.

391. Le point A est le sommet du cône comme celui de la pyramide, & la ligne A D, tirée du sommet A, au centre D de la base du cône, se nomme *son axe*. Lorsque cette ligne est perpendiculaire à la base du cône, il est appellé *cône droit*; sinon il est oblique, & sa hauteur se mesure comme celle de la pyramide, par une perpendiculaire abaissée de son sommet sur sa base. *Fig. 176.*

392. La ligne A B, menée du sommet A du cône, à un point B de la circonférence de sa base, se nomme *le côté du cône*: lorsque le cône est droit tous ses côtés sont égaux, parce que le sommet est également distant alors de tous les points de la circonférence de la base.

393. Si la partie de la pyramide ou du cône vers le sommet, est abattue, la pyramide se nomme *pyramide tronquée*, & le cône, *cône tronqué*.

394. *Le prisme* est un solide terminé par des surfaces planes, parmi lesquelles il y en a deux opposées, égales,

ſemblables & paralleles, qui ſe nomment *les baſes* du priſme, parce qu'on peut le conſidérer également poſé ſur l'une ou ſur l'autre. Ces deux baſes ſont jointes enſemble par des parallélogrammes qui entourent le priſme de tous côtés.

Fig. 177.

395. Si la baſe du priſme eſt un triangle, on le nomme *priſme triangulaire*, lorſqu'elle eſt quadrilatere, *priſme quadrilatere*, & ainſi de ſuite, ſuivant le polygone de ſa baſe.

396. Lorſque la baſe du priſme eſt un parallélogramme, il ſe trouve terminé de toutes parts par des parallélogrammes, & il ſe nomme *parallélipipede.*

Fig. 178. 397. Si la baſe du priſme eſt un cercle, le cercle ſupérieur & celui de la baſe ſe trouvent joints enſemble par une infinité de petits parallélogrammes qui forment une ſurface courbe, alors le priſme eſt appellé *cylindre.*

On peut ſe repréſenter le cylindre par une colonne également groſſe dans toute ſa hauteur, ou bien par une ou pluſieurs dames à jouër, poſées également les unes ſur les autres.

398. La ligne A B, tirée par le centre A, du cercle ſupérieur du cylindre, & par le centre B de ſa baſe, ſe nomme *l'axe du cylindre.*

399. Les prismes, les parallélipipedes & les cylindres, peuvent être *droits* ou *obliques*. Ils sont droits, lorsque les plans qui joignent leur base font des angles droits avec elle, sinon ils sont obliques : alors leur hauteur se mesure par une perpendiculaire abaissée du plan parallele à la base sur celui de cette base, prolongé s'il est nécessaire.

400. *La sphere* ou *le globe*, est un solide terminé par une seule surface courbe, dont tous les points sont également distans d'un point C de ce solide, lequel se nomme *son centre*. *Fig. 179.*

401. On peut concevoir la sphere ou le globe formé par le mouvement d'un demi-cercle A D B, autour de son diametre A B, & alors il est évident, *Fig. 180.*

1°. Que le centre C du demi-cercle A B D, l'est aussi de la sphere.

2°. Que toutes les lignes comme C D, C F, tirées du centre C, de la sphere à sa superficie, sont égales; elles sont nommées *rayons* ou *demi-diametres de la sphere*.

3°. Que toutes celles comme A B, E F, qui passent par le centre C de la sphere, & qui se terminent de part & d'autre à sa surperficie, sont égales, étant composées de deux rayons égaux.

Ces lignes ſont *les diametres de la ſphere.* Le diametre A B, ſur lequel on imagine que le demi-cercle A D B s'eſt mu pour décrire la ſphere, ſe nomme *ſon axe.* Ainſi l'axe d'un globe ou d'une ſphere, eſt toujours un de ſes diametres. Les extrêmités A & B de l'axe de la ſphere ſe nomment *ſes poles.*

4°. Que toutes les lignes, comme G H, perpendiculaires à l'axe A B, décrivent dans le mouvement du demi-cercle A D B, des cercles paralleles entr'eux, & perpendiculaires à l'axe A B: on les nomme *cercles paralleles.* Le plus grand de ces cercles eſt celui qui eſt décrit par le rayon D C, qui eſt également diſtant des poles A & B.

5°. Que tous les cercles paralleles décrits par des lignes G H, K L, chacune également éloignée des poles A & B, ſont égaux.

6°. Enfin, que tout cercle, comme A D B F A, qui paſſe par le centre C de la ſphere, la coupe en deux parties égales. Car ſi, au lieu d'imaginer la ſphere formée par le mouvement du demi-cercle A D B, on la conçoit formée par le mouvement du cercle entier A D B F A, autour de ſon diametre A B, on concevra fort aiſément qu'à meſure que le demi-

cercle A D B avancera du côté de B F A, le demi-cercle B F A avancera de même du côté de A D B; & que lorsque le demi-cercle A D B aura décrit la moitié de sphere, le demi-cercle B F A en aura décrit l'autre moitié; donc la sphere se trouvera coupée en deux parties égales par le cercle A D B F A; donc, &c.

402. Tous les cercles qui passent par le centre de sphere, & qui par conséquent la coupent en deux parties égales, sont nommés *grands cercles de la sphere*, & ils sont tous égaux.

A l'égard des autres cercles qui coupent la sphere sans passer par son centre, on les nomme *petits cercles*. Il est clair, après ce qu'on vient de dire, que les petits cercles coupent la sphere en deux parties inégales.

403. On nomme *zone*, une partie de la sphere comprise entre deux cercles paralleles. C'est une espece de ceinture qui tourne autour d'une partie de la sphere.

404. Outre les corps qu'on vient de définir, il y en a cinq autres qu'on appelle *réguliers*, parce qu'ils sont compris ou terminés par des figures régulieres, égales & semblables.

Ces corps sont :

1°. Le *Tétraedre* ou *la pyramide réguliere*, terminé par quatre triangles équilatéraux.

2°. L'*Exaëdre* ou *le cube*, terminé par six quarrés. *On peut se le représenter par un dez à jouer.*

3°. L'*Octaedre*, terminée par huit triangles équilatéraux.

4°. Le *Dodécaëdre*, terminé par douze pentagones.

5°. Et l'*Icosaëdre*, terminé par vingt triangles équilatéraux.

405. Il n'y a que ces cinq corps réguliers, & voici comme on démontre qu'il ne peut y en avoir d'autres.

Il faut au moins trois angles plans pour former un angle solide, & tous les angles plans qui forment un angle solide doivent, étant ajoutés ensemble, valoir moins que 4 angles droits ou 360 degrés : car pour peu qu'on y fasse attention, on verra clairement, que si ces angles devenoient égaux à 4 angles droits, l'angle solide disparoîtroit. Pour former donc des corps réguliers avec les figures régulieres, il faut que les angles de ces figures, pris au moins 3 à 3, soient de moindre valeur que quatre angles droits. Or les angles du triangle équilatéral valent chacun 60 degrés ; donc on peut

faire un angle ſolide avec trois de ces triangles, & c'eſt celui du tétraëdre. On en peut faire auſſi avec quatre, c'eſt celui de l'octaëdre, & avec cinq, c'eſt celui de l'icoſaëdre ; mais ſix angles de ces triangles valent 360 degrés ou quatre angles droits ; donc on ne peut point faire d'angle ſolide avec ſix triangles équilatéraux ; ainſi on ne peut former avec ces triangles, que le tétraëdre, l'octaëdre, & l'icoſaëdre.

Quatre angles du quarré ne peuvent point faire d'angle ſolide : on n'en peut donc faire qu'avec trois, qui eſt celui de l'exaëdre ou du cube.

L'angle de la circonférence du pentagone eſt de 108 degrés * ; trois de ces angles font 324 degrés : ainſi ils valent moins que quatre angles droits ; par conſéquent ils peuvent former un angle ſolide, & en effet ils forment celui du dodécaëdre ; mais quatre de ces mêmes angles valent plus de 360 degrés. Donc on ne peut point faire d'autre angle ſolide avec le pentagone, que celui du dodécaëdre. *N. 276.*

L'angle de la circonférence de l'exagone eſt de 120 degrés * : trois de ces angles valent donc 360, ou quatre angles droits : donc ils ne ſont point ſuſ- *N. 276.*

ceptibles d'angle solide. L'angle de la circonférence des polygones réguliers au dessus de l'exagone, est plus grand que celui de l'exagone. Donc on pourra encore moins faire d'angle solide avec les angles de ces polygones : donc, &c.

PROBLEMES.

I.

406. *D'un point donné hors un plan, abaisser une perpendiculaire sur ce plan.*

Fig. 181. Soit le point A donné hors du plan FG, sur lequel il faut abaisser une perpendiculaire.

On prendra un compas, & on l'ouvrira de maniere qu'en posant une de ses pointes sur le point donné A, on puisse, avec l'autre pointe, marquer trois points B, D, E, sur le plan FG, on cherchera ensuite le centre C du cercle qui passera par ces trois points, & tirant la ligne AC, elle sera la perpendiculaire demandée.

Car, par la construction, le point A & le point C sont chacun également distans des points B, D, E. Donc la ligne AC ne penche pas plus d'un côté que d'un autre sur le plan FG : donc elle sera

des angles droits avec toutes les lignes tirées ſur ce plan, & qui paſſeront par le point C : donc, &c.

II.

407. *D'un point donné ſur un plan ; élever une perpendiculaire à ce plan.*

Pour réſoudre ce problême, on peut ſe ſervir d'une eſpece d'*équerre* à trois branches, dont l'une ſoit perpendiculaire aux deux autres branches, qui font enſemble un angle quelconque à l'extrêmité de la premiere. On poſera ſur le point donné le ſommet de l'angle droit que fait une des branches de l'équerre avec chacune des deux autres ; la ligne menée de ce point le long de l'autre regle, ſera la perpendiculaire cherchée. Car par cette conſtruction, cette ligne ſera perpendiculaire à deux lignes du plan : elle ne penchera pas, par cette raiſon, plus d'un côté que d'un autre. Donc, &c.



XIV.

De la mesure des surfaces des corps.

408. COMME les corps dont on vient de parler, sont terminés par des surfaces dont on a donné la mesure dans l'article de la planimétrie, il s'ensuit qu'on trouvera aisément la superficie de ces corps, en prenant celle de toutes les figures qui les déterminent.

On remarquera seulement ici,

409. 1°. Que tous les triangles qui entourent les pyramides droites étant égaux, ils sont, pris ensemble, égaux à un seul triangle, qui auroit pour base la somme de toutes les bases de ces triangles, & pour hauteur la perpendiculaire tirée du sommet de la pyramide sur un des côtés de sa base.

410. D'où il suit que *la surface d'une pyramide droite est égale à celle d'un triangle qui a pour base la circonférence de la base de la pyramide, & pour hauteur la même que celle des triangles dont ce solide est entouré.*

On aura donc la ſurface d'une pyramide droite en multipliant la circonférence de ſa baſe par la moitié de la perpendiculaire tirée de ſon ſommet ſur un des côtés de ſa baſe.

Si la pyramide eſt oblique, on cherchera la ſurface de chacun des triangles dont elle eſt compoſée ; la ſomme de toutes ces ſurfaces donnera celle de la pyramide.

411. 2°. Que tous les parallélogrammes qui entourent le priſme droit, ayant la même hauteur, ils ſont égaux à un ſeul rectangle qui auroit pour baſe la ſomme des baſes de ces parallélogrammes, & pour hauteur celle du priſme. Ce qui fait voir que,

412. La ſurface d'un priſme droit X, eſt égale à celle d'un rectangle ABCD, qui a pour baſe la circonférence de celle du priſme, & pour hauteur celle du même ſolide; qu'ainſi on aura *la ſurface d'un priſme droit, en multipliant la circonférence de ſa baſe par ſa hauteur.* Fig. 182 & 183.

413. Lorſque le priſme eſt oblique, il faut trouver la ſurface de chacun des parallélogrammes dont il eſt entouré : la ſomme de toutes ces ſurfaces donnera celle du priſme.

On trouvera de la même maniere la ſurface des cubes & parallélipipedes droits ou obliques.

414. 3°. Que le cylindre pouvant être conſidéré comme un priſme d'une infinité de côtés, on aura ſa ſurface lorſqu'il ſera droit, en multipliant la circonférence de ſa baſe par ſa hauteur.

415. 4°. Que le cône pouvant auſſi être conſidéré comme une pyramide d'une infinité de côtés, on aura la ſurface du cône droit comme celle de la pyramide droite, c'eſt-à-dire, en multipliant la circonférence de ſa baſe par la moitié du côté du cône.

Autrement on peut regarder la ſurface du cône droit, comme composée d'une infinité de petits triangles égaux, dont les ſommets ſont réunis à celui du cône: or tous ces petits triangles étant imaginés enlevés de deſſus le cône & poſés ſur un plan, en ſe touchant immédiatement les uns & les autres, ils formeroient un ſecteur dont le rayon ſeroit le côté du cône, & l'arc, la circonférence de la baſe du cône. Pour avoir la ſuperficie de ce ſecteur *, il faudroit multiplier ſon arc par la moitié de ſon rayon. Donc pour avoir la ſuperficie d'un cône droit, il faut multiplier la circonférence de ſa

* N. 364.

base par la moitié de son côté.

416. Si le cône droit est tronqué, de maniere que sa partie supérieure, ou vers son sommet, ait été coupée par un plan perpendiculaire à l'axe du cône, pour lors tous les petits triangles qui formoient la surface du cône, se changeront en autant de petits trapezes égaux entr'eux, & qui, tous ensemble, seront égaux à un seul trapeze, qui auroit pour hauteur la partie restante du côté du cône, & pour côtés paralleles la circonférence de la base du cône & celle de sa partie tronquée. Or pour avoir la superficie d'un trapeze, il faut multiplier la moitié de la somme de ses deux côtés paralleles par sa hauteur *. Donc pour avoir la superficie d'un cône tronqué droit, il faut multiplier la somme de la moitié de la circonférence de sa base & de sa partie tronquée, par la partie du côté qui est entre sa base & cette partie.

* *N. 350.*

417. On aura de la même maniere la superficie d'une pyramide tronquée droite, & l'on aura celle de la pyramide tronquée oblique, en trouvant la superficie de chaque trapeze dont elle est entourée, & joignant ensemble toutes les superficies de ces trapezes.

Comme la proposition suivante, &

plusieurs de celles qu'on verra dans l'article suivant, ne peuvent être démontrées qu'en supposant d'autres propositions; qu'on a cru devoir ometre dans cet abrégé, on n'en donnera point ici les démonstrations; mais on les trouvera dans l'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier.

418. *La superficie d'une sphere est égale à celle d'un cylindre, non compris ses bases, qui a pour base un grand cercle de la sphere, & pour hauteur son diametre.*

Pour avoir la superficie d'un cylindre, non compris celle de ses bases, on multiplie la circonférence de sa base par sa
* N. 144. hauteur * : donc pour avoir la surface d'une sphere, il faut multiplier la circonférence d'un cercle qui a pour diametre celui de la sphere, par ce même diametre.

419. Ainsi pour trouver la surface de la terre, on multipliera la circonférence d'un de ses grands cercles, qui a été trouvée de 9000 lieues, par son diametre, qui a été déterminé, ainsi
* N. 361. qu'on l'a vu *, de 2863 lieues : le produit de ces deux nombres (25, 767, 000 lieues quarrées) sera la surface de tout le globe terrestre.

X V.

De la Stéréométrie ou mesure des solides.

420. Les solides se mesurent avec d'autres solides plus petits, de même que les superficies se mesurent avec d'autres superficies plus petites. Or de la même maniere que le quarré est la mesure des superficies, le cube l'est des solides : ainsi on se servira ici de *toises cubes*, pour *toiser* les corps, comme on s'est servi de toises quarrées pour toiser ou mesurer les superficies.

421. *Une toise cube* est un cube terminé par six toises quarrées, & *un pied cube* est un cube terminé par six pieds quarrés ; *un pouce cube*, est un cube terminé par six pouces quarrés, &c.

Avant que d'entrer dans le détail de la mesure des corps, on établira quelques propositions qui en rendront le calcul plus aisé & plus général.

422. On appellera *Elémens des solides* des tranches d'une hauteur infiniment petite, formées par des coupes du solide, paralleles à sa base.

423 Il suit de cette définition, que les solides qui sont également larges dans toute leur hauteur, comme les parallélipipedes, les prismes & les cylindres, ont tous leurs élémens égaux.

424. Le nombre des élémens des solides s'exprime par la perpendiculaire abaissée de la base supérieure sur l'inférieure, c'est-à-dire, par la hauteur du solide.

Il suit delà,

425. 1°. Que les solides qui ont leurs élémens égaux chacun à chacun, & en pareil nombre, sont égaux.

426. 2°. Que les solides de même espece, comme les parallélipipedes, les prismes & les cylindres qui ont des bases égales, & qui sont renfermés entre les mêmes plans paralleles, ou qui ont même hauteur, sont égaux.

Car ces solides ayant tous leurs élémens égaux à leur base, il s'ensuit que leurs bases étant égales, leurs élémens sont égaux; ils ont aussi le même nombre d'élémens, à cause de l'égalité de leur hauteur. Donc ils sont égaux entr'eux.

427. 3°. Que les solides composés d'élémens égaux sont égaux, soit qu'ils soient droits ou obliques, pourvu qu'ils

ayent des hauteurs égales ; ce qui eſt évident, puiſqu'alors ils contiennent le même nombre d'élémens égaux.

428. Il ſuit delà qu'un parallélipipede droit, qui aura, par exemple, la ſuperficie de ſa baſe égale à celle d'un oblique, & la même hauteur, lui ſera égal. Il en ſera de même de tous les autres ſolides également larges dans toute leur élévation, lorſqu'ils auront des baſes & des hauteurs égales, c'eſt-à-dire, des priſmes droits ou obliques & des cylindres.

429. 4°. Que pour avoir la ſolidité d'un parallélipipede, d'un priſme ou d'un cylindre droit ou oblique, il faut multiplier la baſe du ſolide par ſa hauteur.

Pour prouver ce dernier article, il faut conſidérer que la ſolidité d'un ſolide de cette eſpece eſt égale au nombre ou à la ſomme de ſes élémens. Or il en a autant qu'on peut imaginer de points ou de parties infiniment petites dans ſa hauteur. Donc ſa baſe ajoutée autant de fois à elle-même qu'il y a de points dans ſa hauteur, donne la ſolidité du ſolide, ou la ſomme de ſes élémens : mais ajouter une grandeur à elle-même autant de fois qu'il y a de parties ou d'unités dans une

seconde, c'est multiplier la premiere par la seconde. Donc le produit de la base du solide par sa hauteur en donne la solidité.

THEORÊME I.

430. *Si l'on multiplie les toises quarrées de la base d'un parallélipipede droit, par les toises linéaires de sa hauteur, le produit donnera la quantité des toises cubes du solide.*

DEMONSTRATION.

Fig. 184. Soit le parallélipipede droit A F dont le côté D E du rectangle de sa base (*a*) soit supposé, par exemple, de 5 toises, & l'autre côté C D de 4, la superficie de ce rectangle sera de 20 toises quarrées.

Si on le divise dans ses 20 toises quarrées par des paralleles aux côtés D E, D C, & si l'on imagine que par toutes ces paralleles il passe des plans perpendiculaires au rectangle D F, ces plans diviseront le solide A F en 20 parallélipipedes, qui auront chacun pour

(*a*) On se sert ici de la base supérieure au lieu de l'inférieure, que la figure ne peut faire voir distinctement.

baſe une toiſe quarrée, & pour hauteur la ligne DA, qu'on ſuppoſe ici de 7 toiſes. Si l'on ſuppoſe enſuite que par l'extrêmité de chacune de toiſes du côté DA, il paſſe des plans paralleles au rectangle DF, ces plans diviſeront chacun des 20 parallélipipedes dont AF eſt compoſé, en 7 cubes, d'une toiſe cube chacun : ainſi il y aura 20 fois autant de toiſes cubes dans tout le parallélipipede AF, qu'il y a de toiſes dans ſa hauteur DA : d'où l'on voit que, pour avoir le nombre des toiſes cubes dont AF eſt compoſé, il faut multiplier la ſurface de ſa baſe DF par ſa hauteur DA. Mais ce nombre de toiſes cubes eſt la ſolidité de ce parallélipipede : donc, &c.

431. Si la baſe DF du parallélipipede AF eſt un quarré, & que ſa hauteur DA ſoit égale au côté DC de ce quarré, il eſt évident que le parallélipipede AF ſera un cube, & qu'on en aura la ſolidité de la même maniere, en multipliant ſa baſe DF par ſa hauteur DA. *Fig. 184.*

432. Il ſuit delà, qu'une ſuperficie multipliée par une ligne, produit un ſolide. Or toute ſuperficie peut être regardée comme le produit de deux lignes : donc le produit de trois lignes ou de

trois nombres, qui exprimeront chacun la valeur d'une de ces lignes, représentera toujours la solidité d'un parallélipipede, qui auroit pour base le produit de deux de ces lignes, & pour hauteur la troisieme.

433. Si ces trois lignes sont égales, les nombres qui les exprimeront le seront aussi, & leur produit représentera un cube.

434. Donc, on aura le cube d'une ligne ou d'un nombre qui exprimera la valeur de cette ligne, en multipliant ce nombre par lui-même, ce qui donnera son quarré, & en multipliant ensuite ce quarré par le même nombre qui a servi à le former.

435. La toise commune ou linéaire, ayant six pieds, pour avoir son cube, on multipliera d'abord 6 par 6, dont le produit 36 sera le nombre des pieds quarrés de la toise quarrée, comme on l'a déja vu dans la planimétrie; on multipliera ensuite 36 par 6, & le produit 216 sera le cube de 6, ou le nombre des pieds cubes d'une toise cube. On trouvera de la même maniere, que le pied cube contient 1728 pouces cubes.

REMARQUE

Sur les divisions de la toise cube.

436. On a vu, n. 329, que la toise quarrée se divise comme la toise linéaire en six parties égales, appellées pieds courant sur toise. On divise de même la toise cube en six parties égales qu'on peut appeller chacune, *pied cube courant sur toise*, ce sont des parallélipipedes qui ont pour base une toise quarrée & pour hauteur un pied linéaire : ainsi le pied cube courant sur toise contient 36 pieds cubes, ou la sixieme partie des 216 pieds de la toise cube.

Le pied cube se divise aussi en douze pouces cubes courant sur toise ; ce sont des parallélipipedes qui ont une toise quarrée pour base & pour hauteur un pouce linéaire : ainsi chaque pouce courant sur toise contient autant de pouces cubes qu'il y a de pouces quarrés dans la toise quarrée.

La ligne cube courant sur toise est de même un parallélipipede qui a pour base une toise quarrée, & pour hauteur une ligne linéaire.

Maniere de calculer les solides.

437. Les divisions de la toise cube dans le même nombre de parties égales que la toise linéaire, donnent le moyen de calculer les solides aussi facilement que les grandeurs linéaires & superficielles. On va en donner un exemple dans le toisé du parallélipipede. Il servira de modele pour le calcul des autres solides.

Fig. 185. 438. Soit donc le parallélipipede droit EC, dont la base supérieure AC, qui est égale à son inférieure, a le côté DC de 4 toises, 4 pieds, & le côté AD qui lui est perpendiculaire de 3 toises 3 pieds.

DC	4 toif. 4 pieds.
AD	3 — 3
	12 — 0 — 0
Pour les 3 pi. du multiplicat.	2 — 0 — 0
pour les 3 pi. du multiplican.	1 — 4 — 6
Pour 1 pied du même	0 — 3 — 6
Superficie de AC	16 — 2
AE	6 — 3
	96
Pour les 3 pi. du multiplicat.	8
pour les 2 pi. du multiplican.	2 — 1
Solidité de EC ...	106 toif 1 pied.

En

En pratiquant ce qui a été expliqué, n. 330, pour le calcul des ſuperficies, on aura 16 toiſes quarrées, plus 2 pieds courant ſur toiſe pour celle du rectangle AC. Pour avoir la ſolidité de EC, il s'agit de multiplier le produit de ſa baſe AC par ſa hauteur AE, qu'on ſuppoſe de 6 toiſes 3 pieds.

On multipliera d'abord les 16 toiſes du multiplicande par les 6 du multiplicateur ; ce qui n'a aucune difficulté.

Pour les 3 pieds du multiplicateur on prendra la moitié des 16 toiſes du multiplicande. Car ſoit AH de 3 pieds, il eſt évident qu'en multipliant le rectangle AC par une toiſe linéaire, on auroit autant de toiſes cubes au produit, qu'il contiendroit de toiſes quarrées. Or en le multipliant par 3 pieds, on a un ſolide une fois plus petit qu'en le multipliant par 6. Donc ce ſolide eſt égal à la moitié des 16 toiſes du multiplicateur AC, c'eſt-à-dire, qu'il eſt de 8 toiſes. *Fig. 185.*

Il reſte à multiplier les 2 pieds courant ſur toiſe du multiplicande AC, par tout le multiplicateur AE.

Pour cela il faut conſidérer que, ſi au lieu de 2 pieds courant ſur toiſe, c'eſt-à-dire, au lieu du tiers de la toiſe quarrée on avoit cette toiſe entiere à multiplier

par 6 toiſes 3 pieds, on auroit pour le produit, 6 toiſes 3 pieds cubes courant ſur toiſe; car alors on auroit un parallélipipede d'une toiſe quarrée de baſe, & de 6 toiſes & demie de hauteur, qui contiendroit évidemment 6 toiſes & 3 pieds cubes courant ſur toiſe. Cela bien obſervé, il s'enſuit que, puiſque 2 pieds courant ſur toiſe ſont le tiers de la toiſe, le parallélipipede formé de leur produit par les 6 toiſes 3 pieds de hauteur de EC, ne ſera que le tiers de celui qui auroit une toiſe entiere de baſe, c'eſt-à-dire de 6 toiſes 3 pieds.

Ainſi pour ces deux pieds, on dira d'abord, le tiers de 6 eſt 2, qu'on poſera aux unités des toiſes; puis le tiers de 3 pieds eſt un pied, qu'on poſera à la colonne des pieds. Additionnant enſuite tous les différens produits de AC multiplié par AE, on aura 106 toiſes & un pied cube pour la ſolidité totale du parallélipipede EC.

439. On voit par cet exemple, que le calcul des ſolides ſe fait de la même maniere que celui des ſuperficies; c'eſt-à-dire, *qu'il faut prendre ſur les toiſes du multiplicande, les pieds & les pouces du multiplicateur, relativement aux parties aliquotes qu'ils contiennent de la toi-*

se, & qu'il faut prendre sur tout le multiplicateur, sçavoir, sur les toises, les pieds, pouces, &c. qu'il contient, *les pieds & les pouces du multiplicande relativement aussi aux parties aliquotes qu'ils sont de la toise.*

Tout cela ne paroît pas avoir besoin d'un plus grand détail après ce qui a été expliqué n. 85 de l'Arithmétique, & dans la planimétrie, n. 330.

THEORÊME II.

440. *Les pyramides droites ou obliques de même base & de même hauteur sont égales* (1).

441. Le cône pouvant être consideré comme une pyramide d'une infinité de côtés, il s'ensuit que *les cônes droits ou obliques, de même base & de même hauteur, sont égaux.*

THEORÊME III.

442. *Toute pyramide est le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur que la pyramide.*

Pour avoir la solidité du prisme, il faut multiplier sa base par sa hauteur;

(1) Ce Théorême & les suivans sont démontrés dans *l'Arithmétique & la Géometrie de l'Officier.*

donc pour avoir la solidité d'une pyramide, il faut multiplier sa base par le tiers de sa hauteur.

THEORÊME IV.

443. *Tout cône est le tiers d'un cylindre de même base & même hauteur que le cône.*

Car le cône est une pyramide d'une infinité de côtés, & le cylindre un prisme de même nombre de côtés. Or la pyramide est le tiers du prisme de même base & même hauteur. Donc le cône est aussi le tiers du cylindre de même base & de même hauteur.

Ainsi puisque pour avoir la solidité du cylindre, il faut multiplier sa base par sa hauteur, pour avoir celle du cône, il ne faut donc multiplier sa base que par le tiers de sa hauteur.

444. Si la pyramide ou le cône sont tronqués par un plan parallele à leur base, on en cherchera la solidité comme s'ils étoient entiers ; on déterminera ensuite la solidité de la partie tronqué ; on ôtera cette solidité de la premiere, le reste sera la solidité de la pyramide ou du cône tronqué.

On suppose dans ce calcul, qu'on con-

noiſſe la hauteur de la pyramide ou du cône entier, avec les baſes ſupérieure & inférieure. Cette hauteur peut ſe trouver avec aſſez de préciſion pour la pratique, ſi la pyramide ou le cône ſont peu élevés, en appliquant deux longues regles ſur deux côtés de la pyramide ou du cône. Ces regles donneront le prolongement de ces côtés, & elles ſe rencontreront dans un point qui ſera le ſommet de la pyramide ou du cône. On abaiſſera enſuite de ce point une perpendiculaire ſur la baſe de la partie tronquée ; cette perpendiculaire donnera la hauteur cherchée, on achevera après cela le toiſé de la pyramide ou du cône tronqué, comme on vient de le dire.

445. Si la pyramide ou le cône tronqué ſont fort élevés, on pourra ſe ſervir de cette méthode pour connoître la hauteur de la partie tronquée.

Soit le cône tronqué droit ABCD, *Fig. 186.* (tout ce que l'on fera pour trouver la hauteur de ſa partie tronquée, pourra s'appliquer auſſi à la pyramide tronquée.) On conſidérera ce cône comme s'il etoit entier, & pour cet effet, on imaginera ſes côtés AD, BC, prolongés juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent au point S, qui ſera ſon ſommet.

On conſtruira le profil, ou la coupe

de ce cône ſur le papier, de cette maniere.

On fera d'abord une échelle : on tirera enſuite la ligne A B, à laquelle on donnera autant de toiſes de l'échelle que cette ligne en a ſur le terrain. Sur le point P, milieu de A B, on élevera la perpendiculaire indéfinie P S. On prendra P R égale au rayon de la baſe ſupérieure D C, & l'on élevera la perpendiculaire R D, qu'on fera égale à la hauteur du cône tronqué. On tirera par A & par D la ligne A D, qu'on prolongera juſqu'à ce qu'elle rencontre P S en S, & l'on aura alors P S déterminée. On verra, en portant ſur l'échelle cette ligne P S, le nombre de parties qu'elle en contiendra. On ôtera enſuite R D, c'eſt-à-dire la hauteur du cône tronqué, de P S, le reſte ſera la hauteur du petit cône retranché.

THEORÊME V.

446. *La ſphere eſt les deux tiers d'un cylindre qui a pour baſe un grand cercle de la ſphere, & pour hauteur le diametre de ce cercle.*

Pour avoir la ſolidité de ce cylindre, il faut multiplier ſa baſe par ſa hauteur

c'est-à-dire, la surface d'un grand cercle de la sphere par son diametre *. Or puisque la sphere en est les deux tiers, il faut, pour en avoir la solidité, trouver d'abord la superficie de son grand cercle, multiplier ensuite cette superficie par les deux tiers du diametre de la sphere, ou, si l'on veut, par ce diametre entier, & en ce cas, il faudra prendre pour la solidité de la sphere, les deux tiers du produit. * N. 414.

Pour trouver, par exemple, la solidité de la terre, on cherchera d'abord la superficie de son grand cercle, en multipliant sa circonférence (9000 lieues) par la moitié de son rayon, ou le quart de son diametre (715 lieues). On multipliera ensuite la superficie de ce cercle (6441750 lieues quarrées) par le diametre de la terre (2863 lieues), & prenant les deux tiers du produit (18-442-730-250), l'on aura la solidité du globe terrestre (12295153500 lieues cubes).

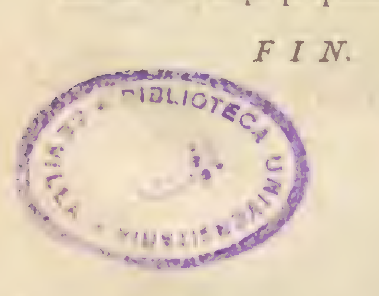
447. On mesurera les corps ou les solides qui peuvent se trouver dans l'usage ordinaire, & qui différeront de ceux dont on vient de donner la mesure, en les considérant comme formés de parallélipipedes, de prismes, de pyramides, &c. suivant la figure de ces corps; les

ſolidités de chacun de ces ſolides étant jointes enſemble, donneront celle du corps qui en ſera composé.

448. On meſurera les corps creux comme s'ils étoient pleins, ſans faire attention à leur cavité ; on meſurera enſuite cette cavité en particulier ; & ôtant ſa ſolidité de la premiere, le reſte ſera celle du corps creux. Par exemple, pour avoir la ſolidité de la maçonnerie d'un puits, on le conſidérera comme s'il n'avoit point de vuide, & l'on en cherchera la ſolidité dans cette ſuppoſition. On meſurera enſuite la ſolidité du vuide du puits, on l'ôtera de la premiere ; & le reſte ſera le toiſé demandé.

449. On pourra toiſer les corps fort irréguliers, en les mettant dans un vaiſſeau régulier, dont le vuide puiſſe être meſuré, enſuite on emplira ce vaiſſeau d'eau ; après quoi on en ôtera le corps à meſurer. Il eſt évident qu'il ſe fera un vuide dans le haut du vaiſſeau égal à la capacité ou à la ſolidité du corps qui étoit dedans ; c'eſt pourquoi en meſurant cette partie vuide du vaiſſeau, on aura la ſolidité du corps propoſé.

F I N.



Approbation du Censeur Royal.

J'AI lu, par ordre de Monseigneur le Chancelier, un Manuscrit qui a pour titre, *l'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier*, par M. le Blond. Il nous a paru que l'Auteur avoit bien rempli son objet en travaillant pour le Militaire, par les fréquentes applications qu'il fait de l'Arithmétique & de la Géométrie aux différens sujets qui ont rapport à la Guerre, afin d'exciter l'émulation du Lecteur, à mesure qu'il apperçoit le fruit de son travail. A Paris le 27 Décembre 1746.

BELIDOR.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & feaux Conseillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT : Notre bien amé CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire à Paris, Nous a fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & donner au Public des Ouvrages qui ont pour titre : *Les Mémoires de Monsieur de Puységur, Lieutenant Général : l'Art de la Guerre par regles & par principes, par Monsieur le Maréchal de Puységur : l'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier ; par M. le Blond.* S'il Nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilége pour ce nécessaires. A CES CAUSES, voulant favorablement

traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces présentes de faire imprimer lesdits Ouvrages en un ou plusieurs Volumes, & autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre, & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de quinze années consécutives, à compter du jour de la date des Présentes; faisons défenses à toutes personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance; comme aussi à tous Libraires & Imprimeurs, d'imprimer, ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter, ni contrefaire lesdits Ouvrages, ni d'en faire aucuns Extraits sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, & autres, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant, ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des Exemplaires contrefaits, de 3000 liv. d'amende, &c. à la charge que ces Présentes seront enrégistrées tout au long sur le Registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la datte d'icelles; que l'impression desdits Ouvrages sera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modele sous le contre-scel des Présentes; que l'Impétrant se conformera en tout aux Réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725; & qu'avant de les exposer en vente, les Manuscrits & Imprimés qui auront servi de copie à l'impression desdits Ouvrages seront remis dans le même état où l'Approbation y aura été donnée ès

mains de notre très-cher & féal Chevalier le sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, & qu'il en sera ensuite remis deux Exemplaires de chacun dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très cher & féal Chevalier le sieur Daguesseau, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant, &c. Voulons que la copie desdites Présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers & Sécrétaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : CAR tel est notre plaisir. DONNÉ à Paris le 12e jour du mois d'Octobre l'an de grace 1747, & de notre Regne le trente-troisieme. Par le Roi en son Conseil.

SAINSON.

Registré sur le Registre 11 *de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris,* No. 850. *fol.* 742. *conformément aux anciens Reglemens confirmés par celui du* 28 *Février* 1723. *A Paris le* 14 *Octobre* 1747.

G. CAVELIER, *Syndic.*

Livres qui se vendent chez le même Libraire.

Ouvrages de M. BELIDOR, *ancien Professeur Royal des Mathématiques, Chevalier de l'Ordre Militaire de S. Louis, &c.*

NOuveau Cours de Mathématique à l'usage de l'Artillerie & du Génie, où l'on applique les parties les plus utiles de cette Science à la théorie & à la pratique des différens sujets qui peuvent avoir rapport à la Guerre. Nouvelle édition corrigee & considérablement augmentée. Un vol. *in-quarto*, avec 34 planches. 1757. 15 liv.

La Science des Ingénieurs dans la conduite des travaux de Fortification & d'Architecture civile, *in*-4°. grand papier, avec plus de 50 Planches, 24 l.

Architecture Hydraulique, ou l'Art de conduire, d'élever, & de ménager les eaux pour tous les besoins de la vie. *Premiere Partie* en deux volumes *in-quarto*, grand papier, enrichis de cent grandes Planches, 40 l.

Architecture Hydraulique, *Seconde Partie*, qui comprend l'Art de diriger les eaux de la mer & des rivieres à l'avantage de la défense des Places, du Commerce & de l'Agriculture; en deux volumes *in*-4°. grand papier, enrichis de 120 Planches, 50 l.

Ouvrages de feu M. l'Abbé DEIDIER, *ancien Professeur Royal des Mathématiques aux Ecoles d'Artillerie de la Fere.*

La Mesure des Surfaces & des Solides par la

connoissance des centres de gravité, & par l'Arithmétique des infinis, *in*-4°. avec figures, 12 l.

Le Calcul différentiel & le Calcul intégral expliqués & appliqués à la Géométrie, *in*-4°. avec figures, 15 l.

Mécanique générale, pour servir d'introduction aux Sciences Phisico-Mathématiques, *in*-4°. avec figures, 15 l.

Le parfait Ingénieur François. Nouvelle édition augmentée, *in*-4°. avec 50 Planches, 1757, 15 l.

Elémens généraux des parties des Mathématiques les plus nécessaires à l'Artillerie & au Génie : en deux volumes *in*-4°. avec plus de 60 Planches, 24 l.

Traité de Perspective théorique & pratique; brochure *in*-4°. 3 l. 10 s.

Ouvrage de M. Ozanam, *de l'Academie Royale des Sciences.*

Cours de Mathématique, qui comprend les parties de cette Science les plus utiles à un homme de guerre; sçavoir, l'introduction aux Mathématiques; les Elémens d'Euclide; l'Arithmétique; la Trigonométrie, avec les Tables des Sinus & des Logarithmes; la Géométrie théorique & pratique; la Fortification réguliere & irréguliere; la mécanique; la Perspective; la Géographie & Cosmographie; la Gnomonique: en cinq vol. *in*-8°. avec plus de 200 Planches 40 l.

Les Recréations Mathématiques & Physiques. Nouvelle édition, en quatre vol. *in*-8°. avec beaucoup de figures, 20 l.

Les Elémens d'Euclide expliqués, avec l'usage

de chaque propoſition pour toutes les parties des Mathématiques. Par le R. P. Deſchalles. Nouvelle édition, corrigée & augmentée, *in*-12 1746. avec 20 Planches, 3 l.

Traité de l'Arpentage & du Toiſé, avec un nouveau Tarif du Toiſé des bois de charpente. Nouvelle édition augmentée, *in*-12. avec figures, 1757. 3 l.

La Géométrie pratique, contenant la Trigonométrie, la longimétrie. la Planimétrie, & la Stéréométrie, avec un Traité de l'Arithmétique par Géométrie, Nouvelle édition, 1756, *in*-12, avec figures 3 l.

Uſage du compas de proportion & de l'Inſtrument univerſel, avec un Traité de la diviſion des champs. Nouvelle édition, avec figures, 1748 2 l. 10 ſ.

Méthode pour lever les Plans & les Cartes de Terre & de Mer, avec inſtrumens & ſans inſtrumens, *in*-12, avec figures, 2 l. 10.

Ouvrages de M. LE BLOND, *Profeſſeur de Mathématique des Pages de la Grande Ecurie du Roi.*

L'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier, contenant les élémens de ces deux Sciences appliquées aux différens beſoins de l'Homme de guerre, en deux vol. *in*-8°. enrichis de 45 Planches, 1748. 12 l.

Abregé d'Arithmétique & de Géométrie à l'uſage des jeunes Militaires, nouvelle édition, *in*-12, avec figures, 1758. 3 l.

Elémens de Fortification, contenant ce qu'il y a de plus eſſentiel à obſerver dans une Place forte, pour initier avec facilité les jeunes Militaires dans l'étude de cette Science, *in*-12,

avec figures. Nouvelle édition augmentée, 1756. 3 l. 10.

Elémens de la guerre des Sieges à l'usage des jeunes Militaires, contenant l'Artillerie, l'Attaque & la defense des Places, avec un petit Dictionnaire des termes, en trois vol. *in* 8°. avec quantité de figures, 15 l.

Essai sur la castramétation, où l'on donne la maniere de former, tracer & mesurer les Camps, *in*-8°. avec figures, 6 l.

Art Militaire.

Art de la Guerre par principes & par regles. Ouvrage de M. le Maréchal de Puysegur, mis au jour par M. le Marquis de Puysegur son fils, Brigadier d'Infanterie, Colonel du Régiment de Vexin, Volume *in folio*, grand papier, en deux Parties, enrichi de Vignettes & de plus de 40 grandes Planches, 1748, 60 l.

Le même Ouvrage, en deux volumes *in*-4°. 30 l.

Memoires historiques & Militaires de Messire Jacques de Chastenet, Chevalier, Seigneur de Puysegur, Colonel du Régiment de Piedmont, & Lieutenant Général des armées du Roi : avec des Instructions Militaires, en deux volumes *in*-12. Nouvelle édition, 1748. 5 l.

Histoire de Polybe, avec un Commentaire ou un corps de science militaire, enrichie de notes historiques & critiques. Par M. de Folard. En 7 vol. *in*-4°. avec figures, 72 l.

Supplément du même Ouvrage, ou le tome VII séparé, contenant les nouvelles découvertes sur la guerre ; Lettre critique d'un Officier

Hollandois, & Sentimens d'un homme de guerre sur le systême militaire du Chevalier de Folard, avec les réponses à ces critiques, *in*-4°. 1753. 10 l.

Abrégé du même Ouvrage, en 3 vol. *in*-4°. avec figures, 1754. 42 l.

Mémoires d'Artillerie de M. Surirey de Saint-Remy. Nouvelle édition considérablement augmentée, avec une ample Table des matieres, en trois volumes *in*-4°. enrichis de Vignettes & de plus de deux cens Planches. 1745. 45 l.

Théorie nouvelle sur le Mécanisme de l'Artillerie, par M. Dulac, Officier d'Artillerie du Roi de Sardaigne, *in*-4°. avec près de 40 Planches, 15 l.

Essai de l'application des forces centrales aux effets de la poudre à canon, par M. Bigot de Morogues, *in*-8°. 2 l. 10.

De l'Attaque & de la défense des Places, avec un Traité pratique des Mines, par M. le Marechal de Vauban, & un Traité de la guerre en général. Nouvelle édition augmentée, en deux volumes *in*-8°. avec plus de 50 Planches. *La Haye*, 12 l.

Traité des Feux d'artifice pour le Spectacle, par M. Frezier, Directeur des Fortifications de Bretagne. Nouvelle édition considérablement augmentee, *in* 8°. avec figures, 1747. 6 l.

Mémoires de M. Goulon, Généralissime des armées de l'Empereur, sur l'Attaque & la Défense d'une Place; avec la Relation du Siege d'Ath, *in*-8°. avec fig. *La Haye*. 5 l.

L'Ingénieur François, contenant la Géométrie pratique, & la Fortification suivant M. de Vauban, *in*-8°. 6 l.

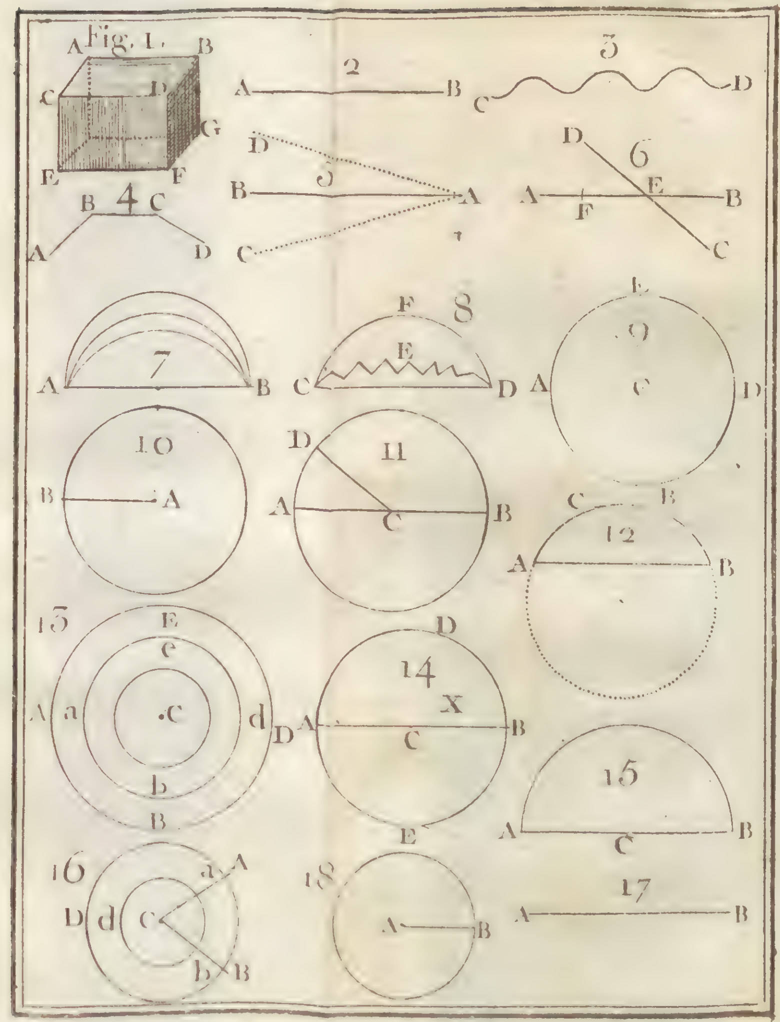
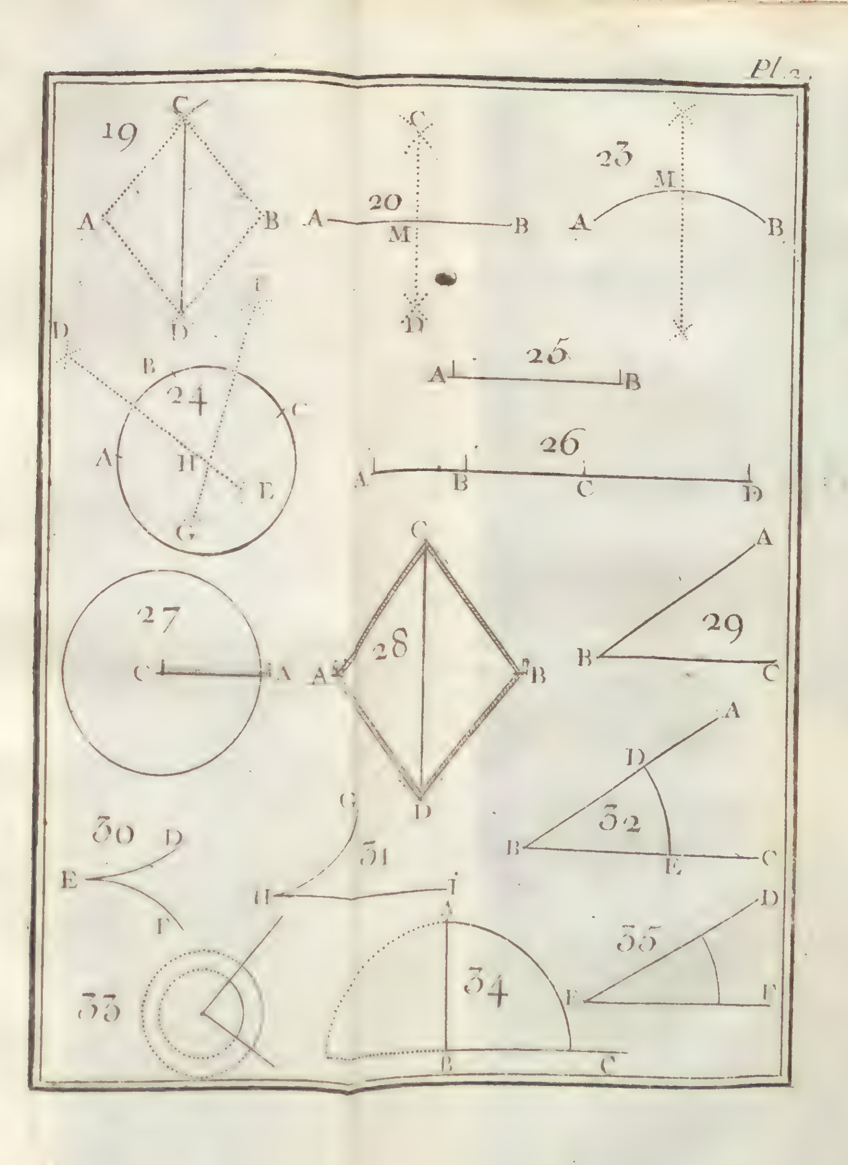


Fig. 1.
A B C D E F G
2
A B
3
C D
4
A B C D
5
D B A C
6
D A F E B C
7
A B
8
F E C D
9
E A C D
10
B A
11
D A C B
12
C E A B
13
E e A a c d D b B
14
D X A C B
15
A C B
16
a A D d C b B
18
E A B
17
A B

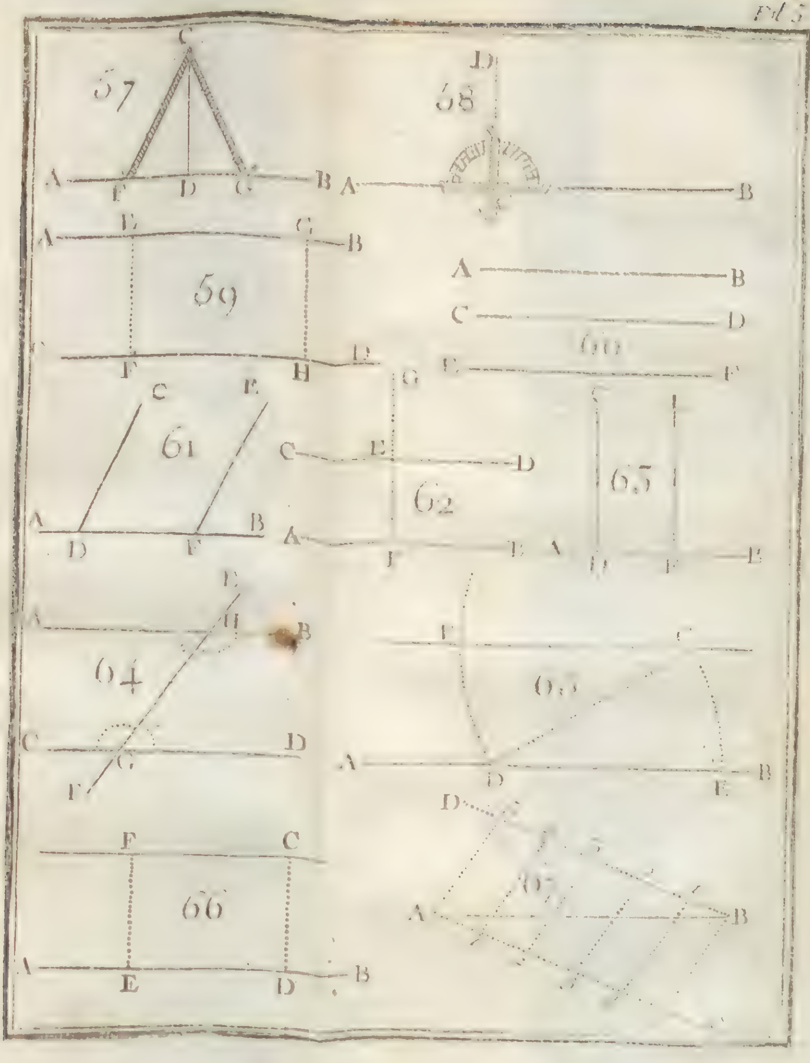



19
C
A
B
D
20
A
M
B
C
D
23
M
A
B
24
D
B
C
A
H
E
G
I
25
A
B
26
A
B
C
D
27
C
A
28
C
A
B
D
29
A
B
C
30
D
E
F
31
G
H
I
32
A
D
B
E
C
33
34
A
B
C
35
D
E
F



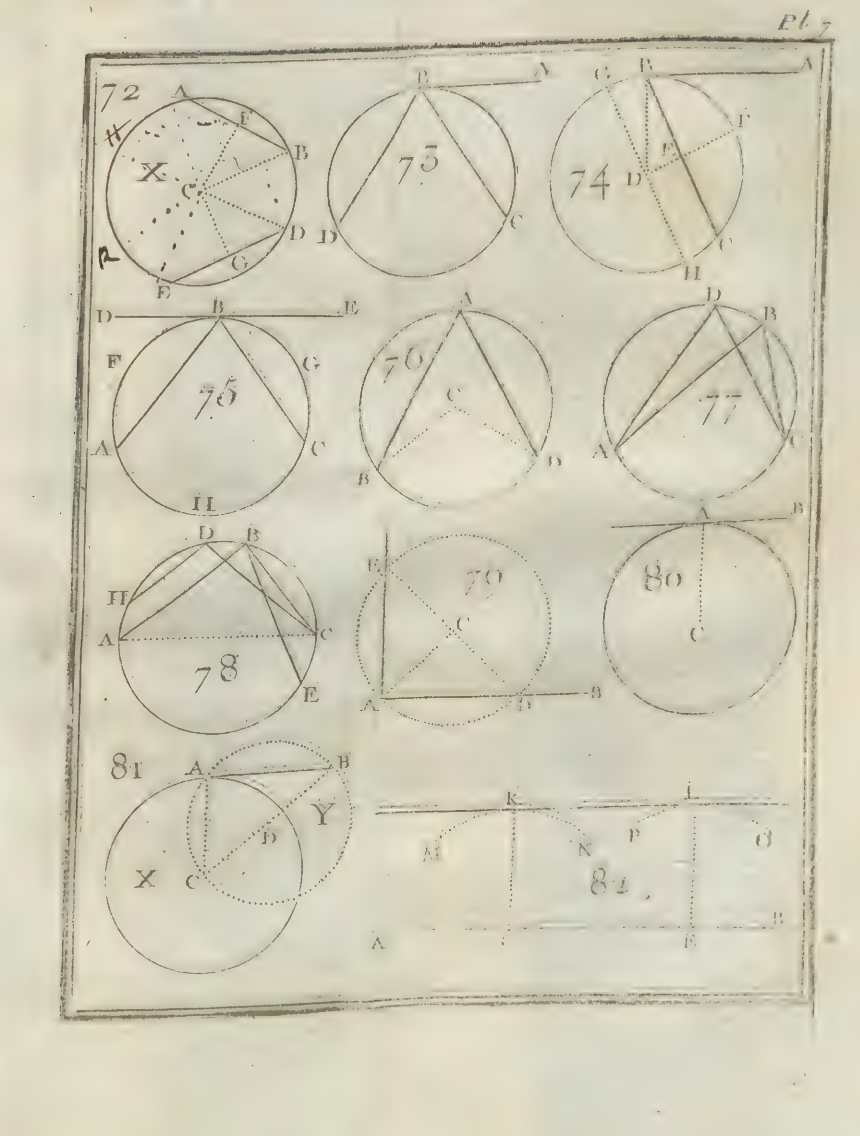



UNIVERSITARIA

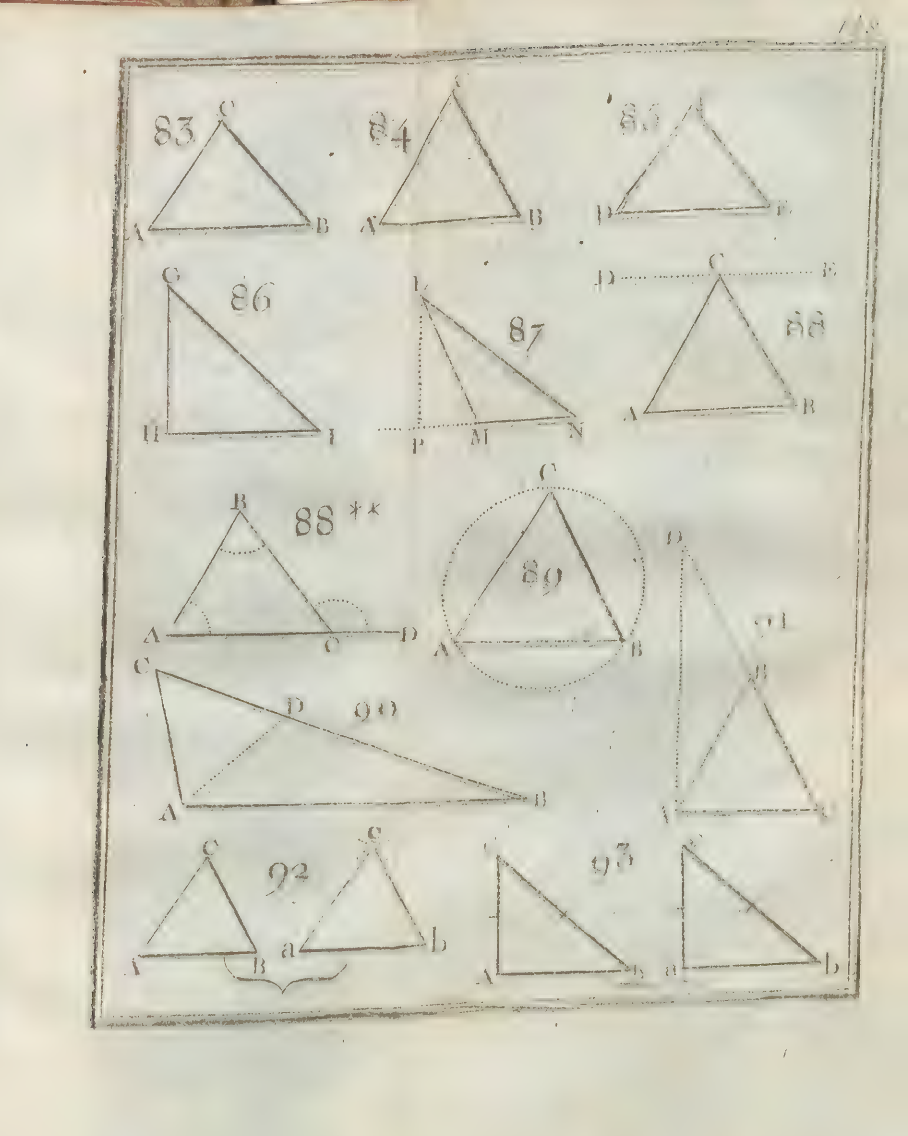

Pl. 5
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67

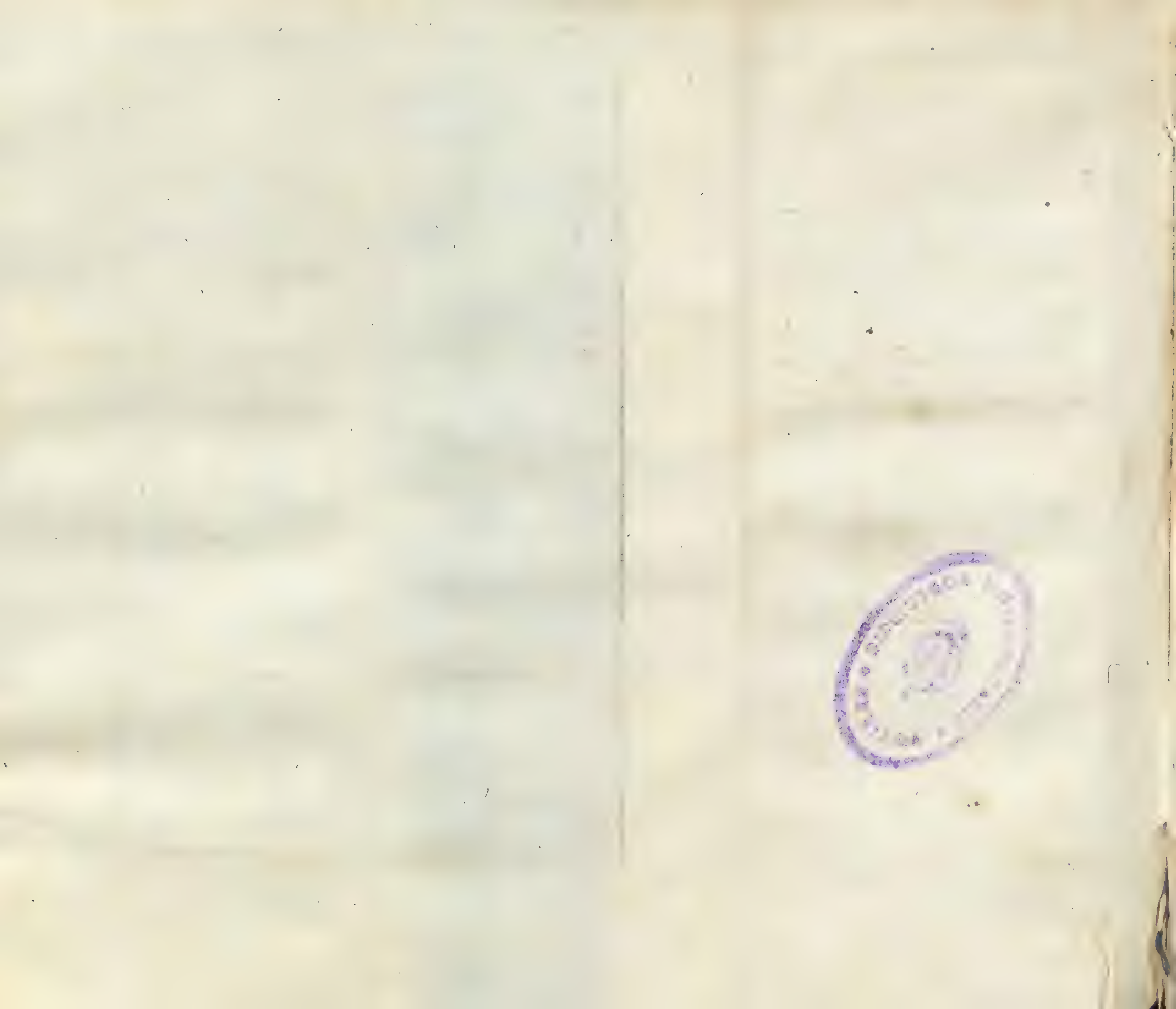
A
B
G
H
68
C
D
69
B D A
X
C
70
E
C
M
B
F

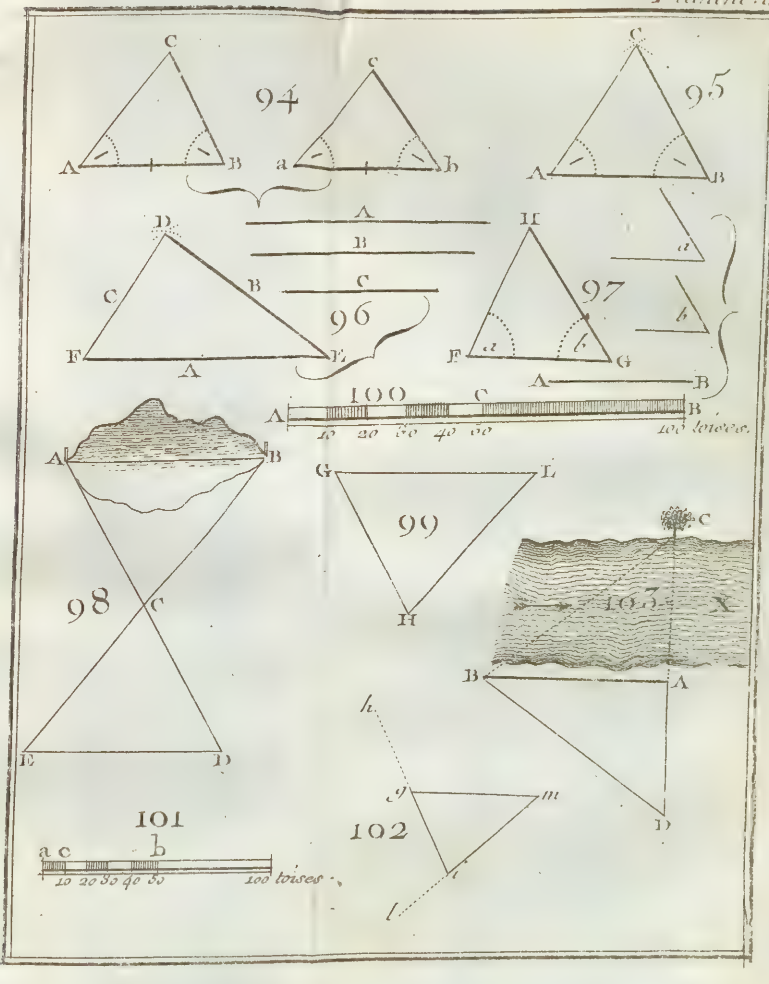

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
SEVILLA


72
A
F
B
X
C
D
G
E
73
B
A
D
C
74
G
B
A
F
E
D
C
H
75
D
B
E
F
G
A
C
H
76
A
C
B
D
77
D
B
A
C
A
B
80
C
78
D
B
H
A
C
E
79
E
C
A
D
B
81
A
B
Y
D
X
C
K
L
M
N
P
O
82
A
E
B



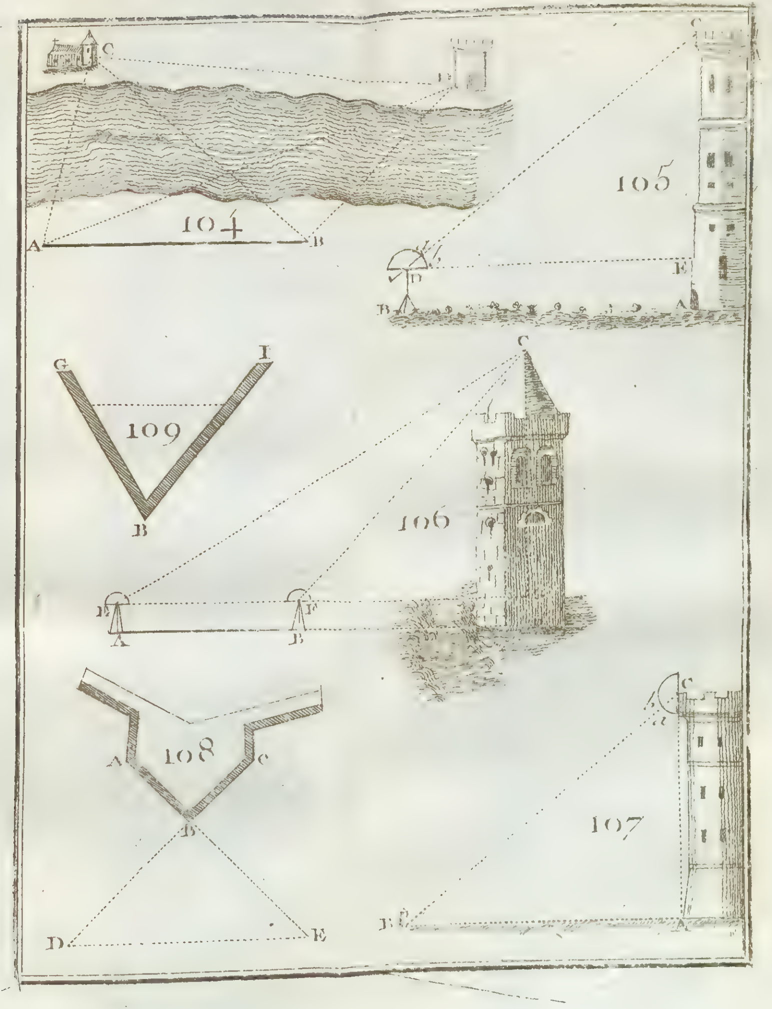

83
C
A
B
84
A
B
86
G
H
I
87
L
P
M
N
D
C
E
88
A
B
88 **
B
A
C
D
C
89
A
B
C
D
90
A
B
D
92
C
A
B
C
a
b
93
A
a
b





94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
10 20 30 40 50 100 toises.
10 20 30 40 50 100 toises.




104
105
106
107
108
109



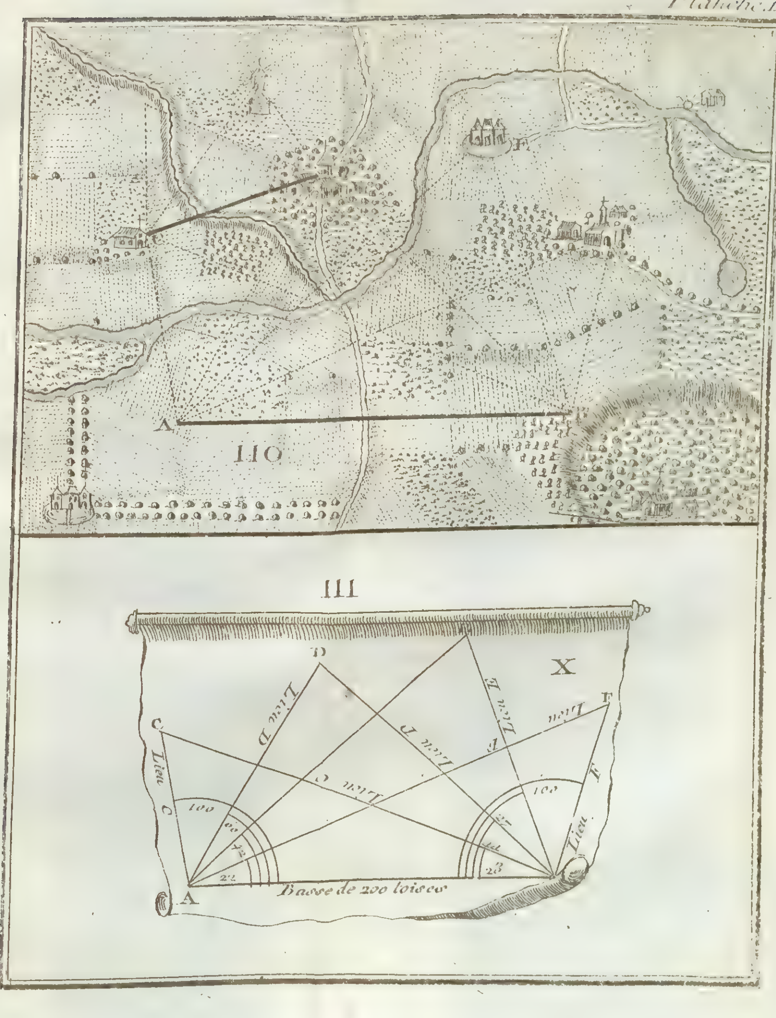
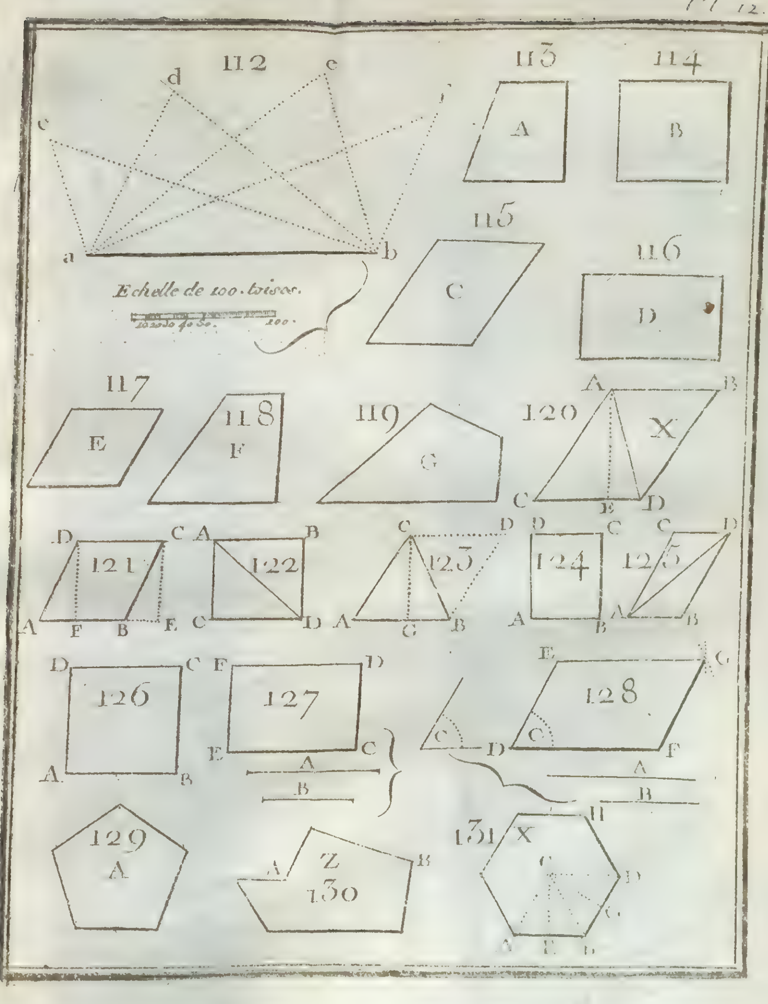


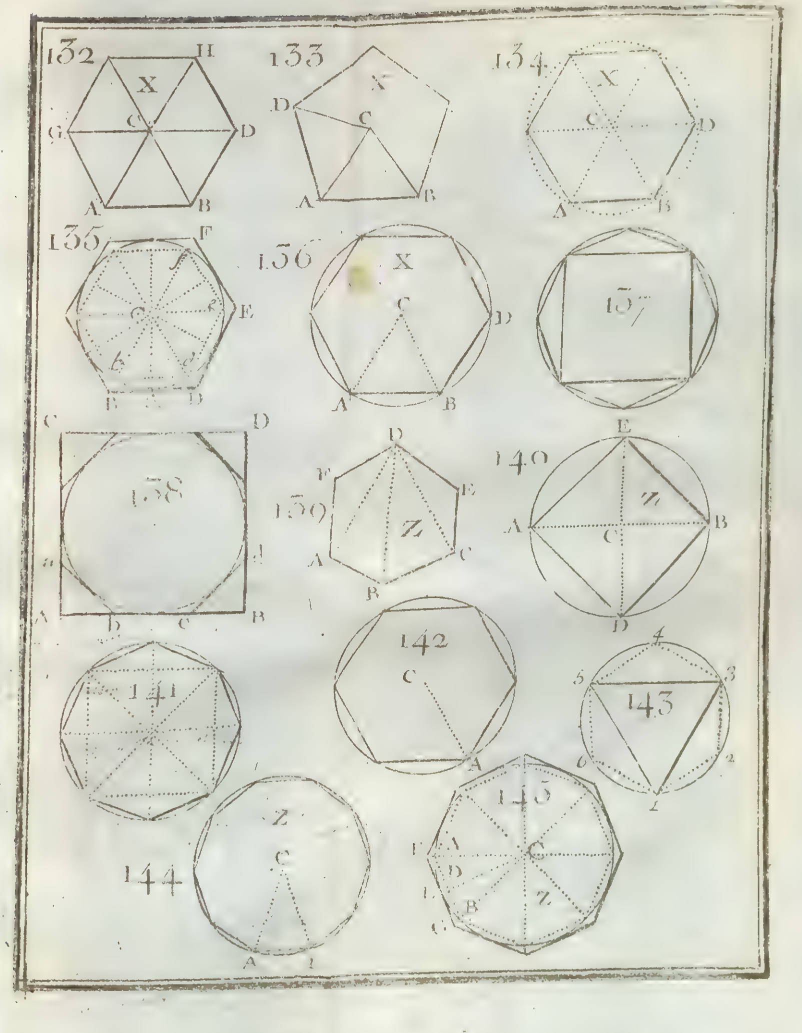
Planche. II.
A
110
III
X
D
C
F
Lieu C
Lieu D
Lieu E
Lieu F
Lieu C
Lieu E
Lieu F
100
100
A
Basse de 200 toises



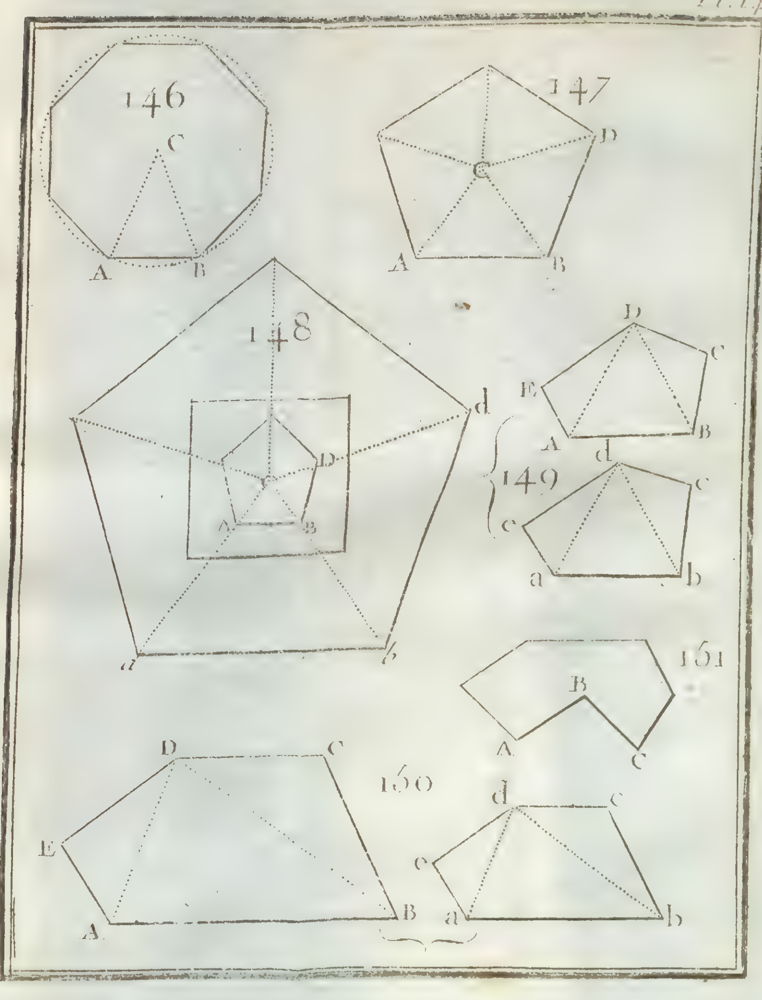

Pl. 12.
112
113
114
115
116
Echelle de 100. toises.
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131


BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

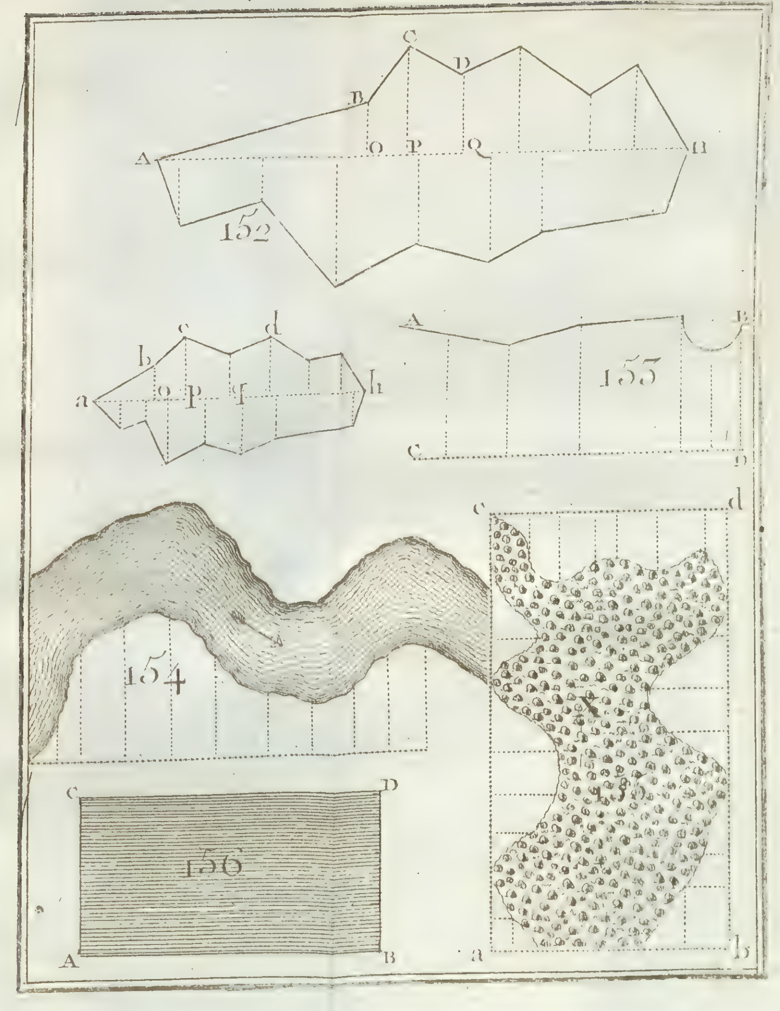
pl 1.



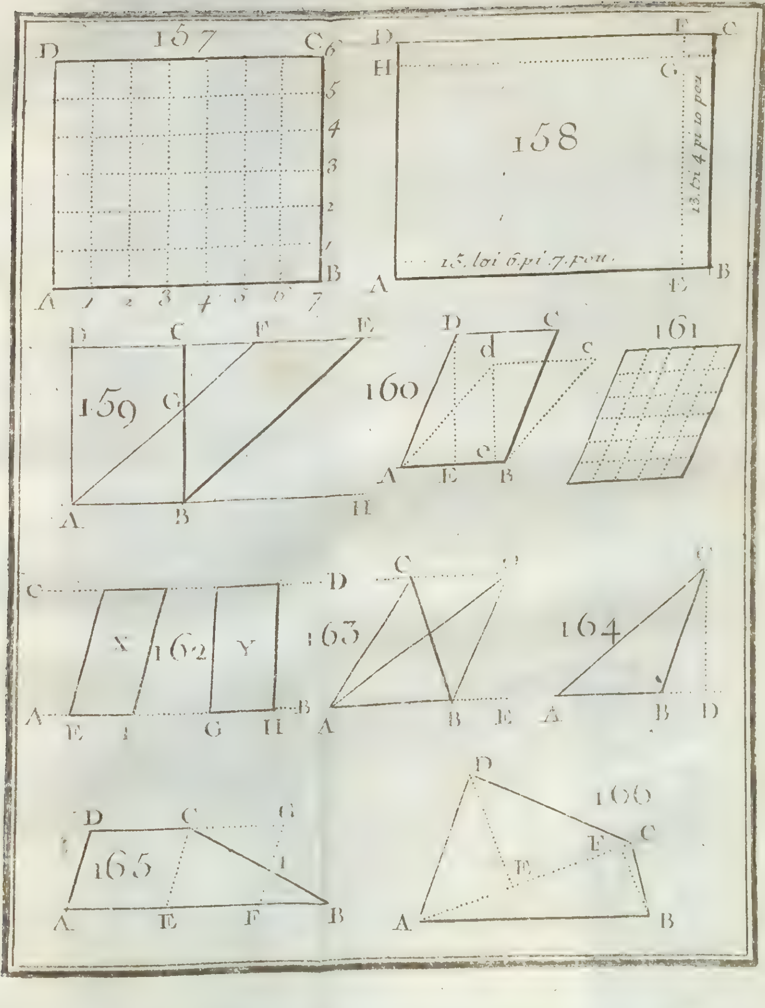


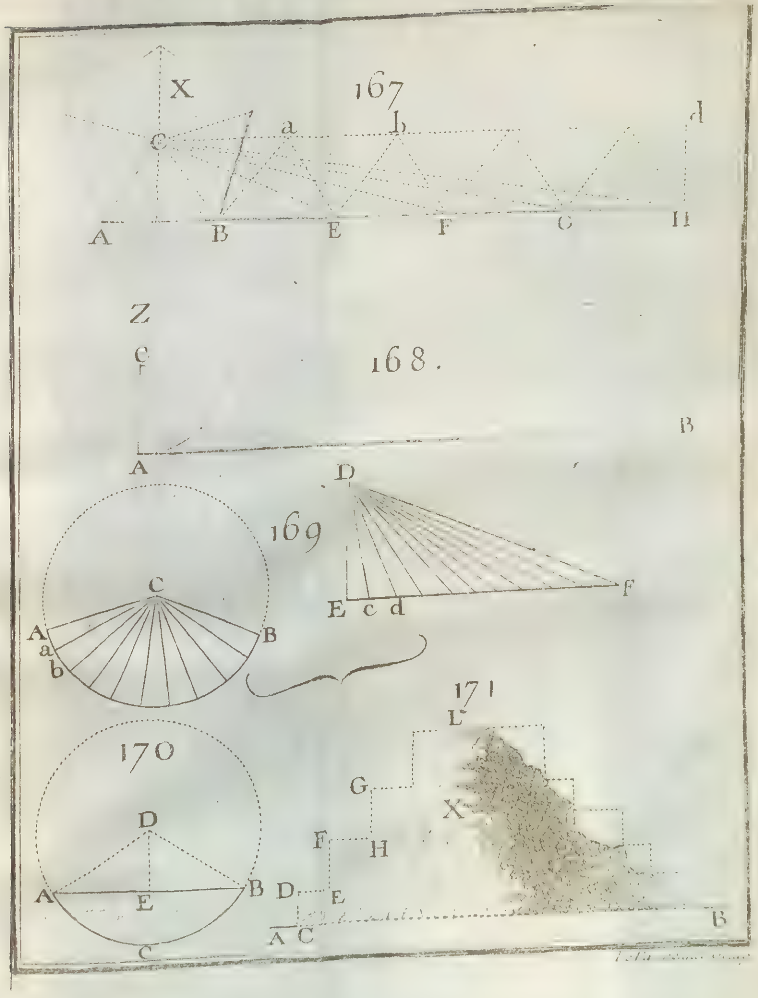

146
C
A
B
147
D
C
A
B
148
d
D
A
B
a
b
D
C
E
A
B
149
d
c
e
a
b
151
B
A
C
D
C
150
E
A
B
d
c
e
a
b



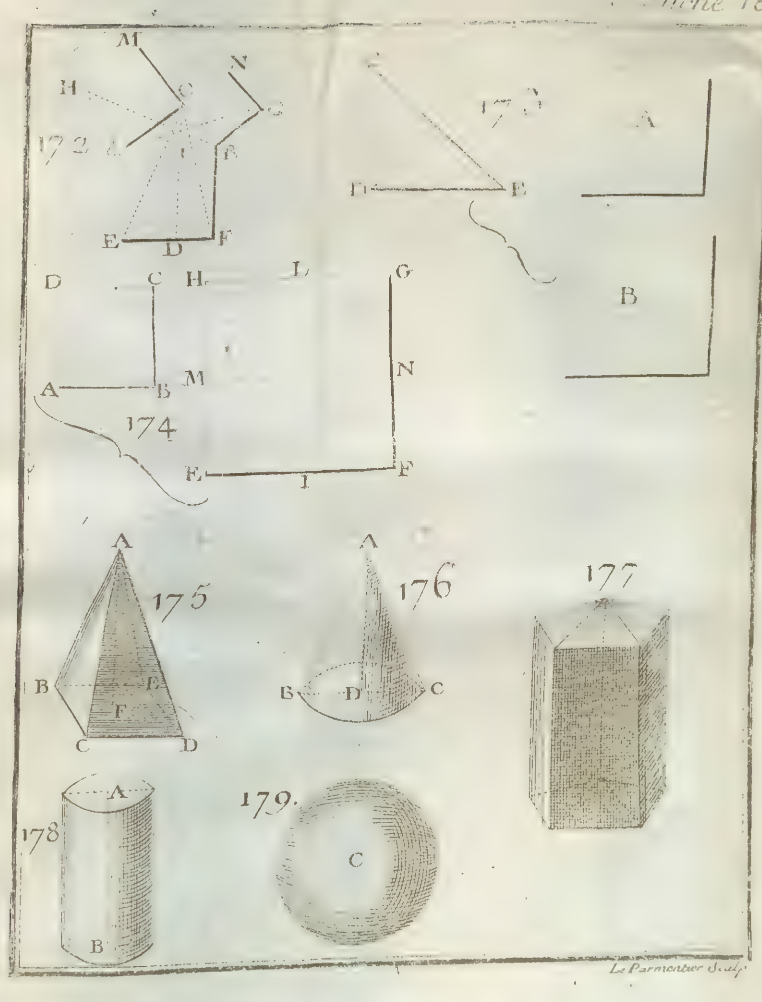


A
B
C
D
O
P
Q
H
152
a
b
c
d
o
p
q
h
153
154
156


157
D
C
6
5
4
3
2
1
B
A
1
2
3
4
5
6
7
158
D
F
C
H
G
13. toi 4 pi 10 pou
15. toi 6. pi 7. pou.
A
E
B
159
D
C
F
E
G
A
B
H
160
D
C
d
c
e
A
E
B
161
C
D
X
162
Y
A
E
F
G
H
B
163
C
A
B
E
164
C
A
B
D
165
D
C
G
I
A
E
F
B
166
D
E
C
A
B


167
X
a
b
d
A
B
E
F
G
H
Z
168.
A
B
D
169
C
A
a
b
B
E
c
d
F
171
L
G
X
F
H
D
E
A
C
B
170
D
A
E
B
C




172
173
174
175
176
177
178
179.
Le Parmentier Sculp.


BIBLIOTECA UNI

Le Parmentier Sculp









GEOMET

DE

LOFFIC





calibrite

colorchecker CLASSIC

mm